解答例

STEP III 2020、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP III 2020、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

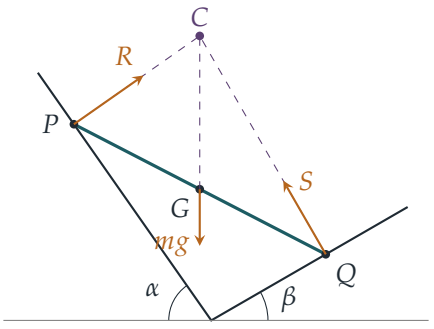
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

棒にはちょうど 3 つの力がはたらいている。中心にはたらく重力と、両端それぞれにはたらく接触力である。互いに平行でない 3 つの力の下で釣り合い（equilibrium）の状態にある物体では、それらの力の作用線（line of action）は 1 点で交わる。したがって問題全体が幾何の問題になる。すなわち、その交点の高さを 2 通りの方法で求め、それらを等しいとおけばよい。小問 (ii) では、Q における垂直抗力（normal reaction）と限界摩擦力（limiting friction）を合成して、摩擦角（angle of friction）λ だけ傾いた 1 つの全抗力（total reaction）にまとめる。ここで $\tan\lambda = \mu$ であり、β を $\beta + \lambda$ に置き換えれば同じ幾何がそのまま使える。

解答

棒は一様な剛体（rigid body）で、長さ $2l$、中心 G をもつとし、2 つの平面は固定されているとモデル化する。2 平面の交線の左側に Π_1、右側に Π_2 を置く。すると P は左側にあって高く、Q は右側にあって低い。



小問 (i)

両方の平面はなめらか（smooth）なので、P における抗力 R は Π_1 に垂直であり、Q における抗力 S は Π_2 に垂直である。傾斜角 α の平面に垂直な直線は、鉛直方向と角 α をなす。よって R の作用線は P から Q の側へ傾きながら、鉛直上向きと角 α をなして上っていく。同様に S の作用線は Q から P の側へ傾きながら、鉛直上向きと角 β をなして上っていく。

棒は 3 つの力、すなわち R、S、および G を通って鉛直にはたらく重力 mg の下で釣り合っている。R と S の作用線の交点 C のまわりのモーメント（moment）を考えると、R と S のモーメントは 0 なので、重力のモーメントも 0 でなければならない。つまり重力の作用線は C を通る。したがって C は G の真上にある。

> **考えてみよう** 「C は G の真上にある」という事実を、どうすれば方程式に書き換えられるだろうか。

Q から測った C の高さを 2 通りの経路で計算する。G は中点であり、棒は水平と角 θ をなすので、G は両端からそれぞれ水平距離 $l\cos\theta$ のところにあり、P は Q より $2l\sin\theta$ だけ高い。

- R の作用線に沿って：鉛直と角 α をなす直線に沿って水平に $l\cos\theta$ だけ進むと、高さは $l\cos\theta\cot\alpha$ だけ上がる。よって C は Q より $2l\sin\theta + l\cos\theta\cot\alpha$ だけ高い。
- S の作用線に沿って：同様にして、C は Q より $l\cos\theta\cot\beta$ だけ高い。

これらを等しいとおき、$l\cos\theta \neq 0$ で割ると

$$2\tan\theta + \cot\alpha = \cot\beta, \qquad \text{すなわち} \qquad 2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。$\beta < \alpha$（ともに鋭角）であるから $\cot\beta > \cot\alpha$ であり、よって $\theta > 0$ となる。これは P が Q より高いことと整合している。

小問 (ii)

Π_1 は依然としてなめらかなので、P における抗力は前とまったく同じである。Q では垂直抗力 N と、Π_2 に沿った摩擦力 F がはたらく。

摩擦力の向き。 棒は剛体なので、P と Q の速度の棒方向の成分は等しい。P が速さ u で Π_1 を滑り下り始め、Q が（符号付きの）速さ w で Π_2 を上るとする。P から Q へ向かう棒の方向は水平より角 ϕ だけ下を向いているので、この方向に分解すると

$$u\cos(\alpha - \phi) = w\cos(\beta + \phi).$$

ここで $\cos(\alpha - \phi) > 0$ であり、また後で $\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$ であることがわかるので、$w > 0$ である。つまり Q は Π_2 を**上ろう**としている。摩擦力はこれを妨げる向きにはたら

くので、F は Π_2 に沿って下向きにはたらく。また釣り合いは限界の状態にあるので、$F = \mu N$ である。

全抗力。N と F を 1 つの力 S' に合成する。この力は法線と角 λ をなし、$\tan\lambda = F/N = \mu$ である。F は斜面に沿って下向き（2 平面の交線の方向）を向いているので、抗力をさらに P の側へ傾ける。よって S' の作用線は Q から P の側へ傾きながら、鉛直上向きと角 $\beta + \lambda$ をなして上っていく。（$\beta + \lambda > \frac{1}{2}\pi$ の場合、この直線は実際には下っていくが、以下の高さの式は余接が負になるだけでそのまま成り立つ。）

棒は再び 3 つの力の下で釣り合っているので、それらの作用線は G の真上の 1 点で交わる。小問 (i) の議論は、θ を ϕ に、β を $\beta + \lambda$ に置き換えるだけで一字一句そのまま通用し、

$$2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha.$$

が得られる。これより $2\tan\phi < \cot\beta$ がわかるので、$\tan\phi < \cot\beta = \tan(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ となり、$\phi + \beta < \frac{1}{2}\pi$ である。これで先に仮定した摩擦力の向きが正しいことが確かめられた。

$2\tan\theta = \cot\beta - \cot\alpha$ からこれを引くと

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \cot\beta - \cot(\beta+\lambda) = \frac{\sin(\beta+\lambda)\cos\beta - \cos(\beta+\lambda)\sin\beta}{\sin\beta\,\sin(\beta+\lambda)}$$
$$= \frac{\sin\lambda}{\sin\beta\,(\sin\beta\cos\lambda + \cos\beta\sin\lambda)}.$$

分子と分母を $\cos\lambda$ で割って $\tan\lambda = \mu$ を用い、さらに $\cos\beta$ をくくり出すと

$$2(\tan\theta - \tan\phi) = \frac{\mu}{\sin\beta\,(\sin\beta + \mu\cos\beta)} = \frac{\mu}{\sin\beta\cos\beta\,(\tan\beta + \mu)} = \frac{2\mu}{(\mu + \tan\beta)\sin 2\beta}.$$

両辺を半分にして

$$\tan\theta - \tan\phi = \frac{\mu}{(\mu + \tan\beta)\sin 2\beta},$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

- $\mu = 0$ のとき右辺は 0 となるので $\phi = \theta$ である。小問 (ii) は当然のことながら小問 (i) に帰着する。
- 右辺は正なので $\phi < \theta$ である。摩擦があると、なめらかな平面の場合よりも棒はより水平に近い状態で静止できる。P が滑り下りようとしている端であることを考えれば、これは納得できる。

- $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$ とする。すると $2\tan\theta = \sqrt{3} - 1/\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}$ なので $\theta = 30^\circ$ である。$\mu = 0.5$ のとき公式から $\tan\phi = 0.5774 - 0.5/(1.0774 \times 0.8660) \approx 0.0415$ となり、$\phi \approx 2.4^\circ$ である。これらの値に対して、水平方向と鉛直方向の力の分解および G のまわりのモーメントの式を直接解くと（コンピュータによる検算で、何千組ものランダムな角度と係数について繰り返した）、同じ ϕ が得られる。
- 任意の μ について、$2\tan\phi = \cot(\beta + \lambda) - \cot\alpha$ を使えば手早く確かめられる。この場合 $\lambda \approx 26.57^\circ$、$\cot 56.57^\circ \approx 0.6606$ であり、$(0.6606 - 0.5774)/2 \approx 0.0416$ となって、丸め誤差の範囲で一致する。

よくある間違い

- 摩擦力を Π_2 に沿って上向きにとってしまう。P が滑り下りるとき、棒の長さが一定であるために Q は斜面を**上る**ことになるので、Q における摩擦力は斜面に沿って下向きにはたらく。
- 抗力の角度を鉛直方向ではなく水平方向から測ってしまう。傾斜角 α の平面の法線は、**鉛直方向**と角 α をなす。

STEP のその先へ

ここで用いた 3 力の作用線が 1 点で交わるという性質は、剛体の釣り合いの一般的な条件、すなわち合力が 0 であり、任意の点のまわりの合モーメントが 0 であるという条件の特別な場合である。摩擦力と垂直抗力を合成して半頂角 λ の「摩擦円錐」（cone of friction）として捉えるのは、技術者がはしご、くさび、ねじの安定性を考えるときの方法であり、摩擦力の向きを決めた速度による議論は、瞬間回転中心（instantaneous centre of rotation）の考え方にほかならない。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦をこうした精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。