解答例

STEP III 2020、第 8 問

純粋数学 • 数列と無限降下法

> **STEP III 2020、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.8 節「**有理数を数える**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/counting-rationals.html

鍵となる考え方

添字の大きい項はどれも、添字がおよそ半分の項からつくられている。したがって、組 (u_n, u_{n+1}) についての主張はどれも、より小さい添字の組へと押し戻すことができ、**降下法**（descent）による議論（これは最小反例（smallest counterexample）を選ぶことと同値である）がすべての小問で役に立つ。最初のいくつかの項を書き出し、連続する各組から新しい二つの組がどのように生じるかを書いてみると、証明の前に規則性が見えてくる。

解答

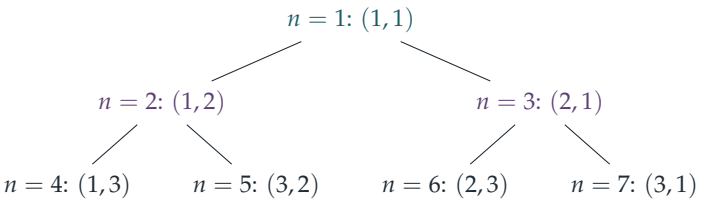
最初の 16 項は

$$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1.$$

である。すべての項は正の整数である。実際、u_1 についてはこれが成り立ち、それ以降の各項は前の項そのものか前の二つの項の和であるから、（強い）帰納法（strong induction）によって従う。

ある組から後の組がどのように生じるかを記録しておく価値がある。$(u_k, u_{k+1}) = (a, b)$ ならば、定義から直ちに

$$(u_{2k}, u_{2k+1}) = (a,\ a+b), \qquad (u_{2k+1}, u_{2k+2}) = (a+b,\ b). \tag{$*$}$$



位置 n の組とは (u_n, u_{n+1}) のことである。$(*)$ より、その左の子は位置 $2n$、右の子は位置 $2n+1$ にある。位置 $n \geq 2$ の組はどれも、位置 $\lfloor n/2 \rfloor$ の組からちょうどこの仕方で生じる。

小問 (i)

$n \geq 2$ である連続する組 (u_n, u_{n+1}) をとり、$k = \lfloor n/2 \rfloor \geq 1$ とおく。

- $n = 2k$ のとき、組は $(u_k,\ u_k + u_{k+1})$ である。$u_{k+1} \geq 1$ であるから、奇数添字の項 $u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ は偶数添字の項 $u_{2k} = u_k$ より大きい。
- $n = 2k+1$ のとき、組は $(u_k + u_{k+1},\ u_{k+1})$ である。このとき $u_k \geq 1$ であるから、$u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ は $u_{2k+2} = u_{k+1}$ より大きい。

よって、最初の組 $(u_1, u_2) = (1,1)$ を除くすべての組において、奇数添字の項のほうが真に大きい。特に、**組の二つの項が等しいのは最初の組だけである。**

小問 (ii)

$d > 1$ が u_n と u_{n+1} の両方を割り切るとする。$u_1 = u_2 = 1$ であるから $n = 1$ ではありえず、$n \geq 2$ である。$k = \lfloor n/2 \rfloor$ とおくと $1 \leq k < n$ である。

- $n = 2k$ のとき：$d \mid u_{2k} = u_k$ かつ $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ であるから、d は差 u_{k+1} を割り切る。
- $n = 2k+1$ のとき：$d \mid u_{2k+2} = u_{k+1}$ かつ $d \mid u_{2k+1} = u_k + u_{k+1}$ であるから、$d \mid u_k$ である。

いずれの場合も、d はより前の連続する組である u_k と u_{k+1} の両方を割り切る。これが示すべきことであった。

次に、ある連続する組が共通因数 $d > 1$ をもつと仮定し、そのような組 (u_n, u_{n+1}) を n ができるだけ小さくなるように選ぶ。上で見たように $n \neq 1$ であり、いま述べた議論により、同じ共通因数をもつ位置 $k < n$ の組が得られる。これは n の最小性に矛盾する。したがって、連続する二つの項はどれも互いに素（co-prime）である。

小問 (iii)

ある順序対 (a,b) が二つの異なる位置に現れる、すなわち $m<n$ として $(u_m,u_{m+1})=(u_n,u_{n+1})=(a,b)$ であると仮定する。このような重複のうち、m ができるだけ小さいものを選ぶ。

$m=1$ ならば $a=b=1$ である。しかし $n\geq 2$ であり、小問 (i) より位置 n の組の二つの項は等しくない。よって $m\geq 2$ であり、このとき小問 (i) より $a\neq b$ でもある。

> **考えてみよう** a と b だけから、位置が奇数か偶数かをどのように判定できるだろうか。

小問 (i) より、組の大きいほうの項が奇数添字をもつので、位置の偶奇（parity）は組そのものによって決まる。

- $a<b$ ならば、第 2 項が奇数添字をもつので、m と n はともに偶数である：$j<k$ として $m=2j$、$n=2k$。このとき $u_j=u_{2j}=a$ かつ $u_{j+1}=u_{2j+1}-u_j=b-a$ であり、同様に $(u_k,u_{k+1})=(a,b-a)$ である。
- $a>b$ ならば、m と n はともに奇数である：$1\leq j<k$ として $m=2j+1$、$n=2k+1$。このとき $u_{j+1}=u_{2j+2}=b$ かつ $u_j=u_{2j+1}-u_{j+1}=a-b$ であり、同様に $(u_k,u_{k+1})=(a-b,b)$ である。

どちらの場合も、一つの順序対が二つの異なる位置 j と k に現れ、しかも $j\leq m/2<m$ である。これは m の選び方に矛盾する。よって、正の整数の順序対が二つの異なる場所で連続して現れることはない。

小問 (iv)

$a>b$ で a,b は互いに素とし、(a,b) はこの数列の連続する組ではないと仮定する。このとき $a-b$ と b は正の整数であり、しかも互いに素である。実際、$a-b$ と b の任意の共通因数は $(a-b)+b=a$ も割り切るので、a と b の共通因数となり、1 でなければならない。

もしどこかで $a-b$ の直後に b が続く、すなわち $(u_k,u_{k+1})=(a-b,b)$ であるとすると、$(*)$ より

$$(u_{2k+1},u_{2k+2})=\big((a-b)+b,\ b\big)=(a,b),$$

となり、(a,b) についての仮定に矛盾する。よって $(a-b,b)$ も連続して現れない互いに素な組であり、その和は $a<a+b$ である。

$a<b$ の場合の同様の結果は次のとおりである：a と $b-a$ は互いに素な正の整数であり、a の直後に $b-a$ が続く形で連続して現れることはなく、その和 b は $a+b$ より小

さい。証明は同じである。a と $b-a$ の共通因数は $a+(b-a)=b$ を割り切り、また $(u_k, u_{k+1})=(a, b-a)$ ならば $(u_{2k}, u_{2k+1})=(a,\, a+(b-a))=(a,b)$ となる。

小問 (v)

すべての項は正の整数であるから、$f(n)=u_n/u_{n+1}$ は正の有理数であり、値域（range）は正の有理数全体に含まれる。以下、すべての正の有理数が値としてとられ、しかもちょうど一度だけとられることを示す。

すべての正の有理数は値域に含まれる。正の有理数を既約分数（lowest terms）で p/q と表す。ここで p, q は互いに素な正の整数である。互いに素なすべての組 (p,q) が、ある n について (u_n, u_{n+1}) として現れることを主張する。そうでないとすると、現れない互いに素な組のうち、$a+b$ ができるだけ小さいもの (a,b) を選ぶ。$a=b$ ではありえない。実際、そのとき互いに素であることから $a=b=1$ となるが、$(1,1)$ は $n=1$ で現れる。よって $a>b$ または $a<b$ であり、小問 (iv) により、現れない互いに素な組で和がより小さいものが得られる。これは最小性に矛盾するので、互いに素なすべての組 (p,q) はある位置 n に現れ、このとき $f(n)=p/q$ である。

f は単射 (*one-to-one*) である。$f(m)=f(n)$ とする。小問 (ii) より、u_m/u_{m+1} と u_n/u_{n+1} はともに分母が正の既約分数である。正の有理数のこのような表し方はただ一つであるから、$u_m=u_n$ かつ $u_{m+1}=u_{n+1}$ である。小問 (iii) より、同じ順序対が二つの異なる場所に現れることはないので、$m=n$ である。

以上より、f は正の整数全体から正の有理数全体への全単射（bijection）であり、したがって逆関数（inverse）f^{-1} をもつ。既約分数 p/q が与えられたとき、$f^{-1}(p/q)$ は p の直後に q が続くただ一つの位置である。たとえば、3 の直後に 5 が続くのは位置 10 だけであるから、$f^{-1}(\frac{3}{5})=10$ である。

検算

- 書き出した項から組 $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,2), (2,3), (3,1), (1,4), \ldots$ が得られる。最初の組以降は奇数添字の項のほうが大きく、すべての組は互いに素であり、重複する組はない。
- 小問 (iv) の降下を 3/5 に対して実行すると $(3,5) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1)$ となる。$(*)$ を用いて逆にたどると、位置 1 の $(1,1)$ から位置 2 の $(1,2)$、位置 5 の $(3,2)$、位置 10 の $(3,5)$ が得られる。実際 $u_{10}=3$、$u_{11}=5$ である。
- 最初の 200 万項についてコンピュータで確かめたところ、小問 (i)–(iii) が成り立ち、$p+q \le 21$ である互いに素な組 (p,q) はどれもちょうど一度ずつ現れた。

よくある間違い

- 小問 (ii) と (iii) で、最初の組 $(1,1)$ を別に除外するのを忘れること。これは各降下の基底段階である。
- 小問 (iii) で、二つの位置の偶奇が同じであることを根拠なしに仮定すること。まさにこれを保証するのが小問 (i) である。
- 小問 (v) で、値域が正の有理数全体であることだけを証明すること。逆関数をもつには f が単射であることも必要であり、それには小問 (ii) と (iii) を合わせて用いる。

STEP のその先へ

これはスターンの二原子数列（Stern's diatomic sequence）であり、u_n/u_{n+1} を並べるとカルキン–ウィルフ（Calkin–Wilf）による有理数の数え上げが得られる。これは $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}^+$ の間の明示的な全単射であり、有理数全体が可算（countable）であることを具体的に示している。小問 (iv) と (v) の降下はユークリッド（Euclid）の互除法（Euclid's algorithm）の引き算版であり、木の中で $(1,1)$ から (p,q) へ至る道筋は p/q の連分数（continued fraction）を表している。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、ユークリッドの互除法と連分数を見事に解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。