解答例

STEP III 2020、第 7 問

純粋数学 • 2 階微分方程式

STEP III 2020、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は、二階線形微分方程式（second-order linear equation）が二つの一階線形微分方程式に**因数分解**（factorise）できる場合があることを示している。それぞれの一階方程式は積分因子（integrating factor）を用いて解くことができる。小問 (ii) で行うべきことは、その因数分解を見つけることである。係数を比較する（matching coefficients）と g についての非線形（non-linear）な一階方程式が得られ、冪関数の形（power-law）を仮定するとこれが解ける。その後は、初期条件（initial conditions）を用いながら二つの一階方程式を順に解けばよい。

解答

小問 (i)

二つ目の方程式から、u を y で表すことができる。

$$u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{g}(x)\, y.$$

$\mathrm{g}(x)y$ に積の微分法（product rule）を用いて微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

これら二つを $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)u = \mathrm{h}(x)$ に代入すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{g}'(x)\, y + \mathrm{g}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\, y = \mathrm{h}(x),$$

となり、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の項と y の項をそれぞれまとめると、ちょうど方程式 (1) が得られる。

小問 (ii)

g の方程式。 (2) を (1) と比較すると、次が必要である。

$$\mathrm{g}(x)+\mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x},\qquad \mathrm{g}'(x)+\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2},\qquad \mathrm{h}(x)=4x+12.$$

一つ目から $\mathrm{f}=1+\frac{4}{x}-\mathrm{g}$ が得られる。これを二つ目に代入して f を消去すると、

$$\mathrm{g}'(x)+\Big(1+\frac{4}{x}\Big)\mathrm{g}(x)-(\mathrm{g}(x))^2=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}.$$

これが求める g についての一階方程式である。

冪関数の解。 $\mathrm{g}(x)=kx^n$ とおくと、左辺は

$$knx^{n-1}+kx^n+4kx^{n-1}-k^2x^{2n}.$$

考えてみよう k がわかる前に、n をどのように選べばよいだろうか？

x の冪に注目する。右辺には x^{-1} と x^{-2} しか現れないので、x^n、x^{n-1}、x^{2n} はこれらだけを生じなければならない。$n=-1$ とすればそうなる。実際、$x^n=x^{-1}$ であり、x^{n-1} と x^{2n} はどちらも x^{-2} である。このとき左辺は

$$\frac{k}{x}+\frac{-k+4k-k^2}{x^2}=\frac{k}{x}+\frac{3k-k^2}{x^2}.$$

となる。x^{-1} の項を比較すると $k=2$ であり、このとき $3k-k^2=6-4=2$ となって x^{-2} の項も一致する。よって

$$n=-1,\quad k=2:\qquad \mathrm{g}(x)=\frac{2}{x},\qquad \mathrm{f}(x)=1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}=1+\frac{2}{x}.$$

(2) を解く。 小問 (i) により、(2) は次の二つの方程式の組と同値になる。

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\Big(1+\frac{2}{x}\Big)u=4x+12,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=u.$$

条件は $x=1$ で与えられているので、$x>0$ で考える。

u の方程式。 積分因子は $\exp\int(1+\frac{2}{x})\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x+2\ln x}=x^2\mathrm{e}^x$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\mathrm{e}^x u)=(4x^3+12x^2)\,\mathrm{e}^x.$$

右辺はちょうど $4x^3\mathrm{e}^x$ の導関数（積の微分法による）であるから、

$$x^2\mathrm{e}^x u=4x^3\mathrm{e}^x+C,\qquad u=4x+\frac{C\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

$x=1$ における u の値は初期条件から求まる。$u=y'+\frac{2}{x}y=-3+2\times5=7$ である。よって $4+Ce^{-1}=7$ となり、$C=3e$ であって、

$$u=4x+\frac{3e^{1-x}}{x^2}.$$

y の方程式。積分因子は $e^{2\ln x}=x^2$ であるから、

$$\frac{d}{dx}(x^2y)=x^2u=4x^3+3e^{1-x},\qquad\text{したがって}\qquad x^2y=x^4-3e^{1-x}+D.$$

$x=1$ において $5=1-3+D$ であるから、$D=7$ である。したがって

$$\boxed{y=x^2+\frac{7-3e^{1-x}}{x^2}}.$$

ここでは $y(1)=5$ を用い、C を求める際に $y'(1)=-3$ を用いたので、両方の条件が満たされている。

検算

- $x=1$ において $y=1+7-3=5$ である。微分すると $y'=2x-14x^{-3}+3e^{1-x}x^{-2}+6e^{1-x}x^{-3}$ であり、$x=1$ では $2-14+3+6=-3$ となる。
- 特殊解の部分（particular part）$y=x^2$ は、それ単独で (2) を満たすはずである。$2+(1+\frac{4}{x})2x+(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})x^2=2+2x+8+2x+2=4x+12$ であり、確かに満たしている。
- 枠で囲んだ y を、$x=0.3$ から $x=5$ までの多くの点でコンピュータにより (2) に代入すると、両辺は数値微分の誤差（約 10^{-5}）の範囲内で一致する。

よくある間違い

- $y'(1)=-3$ をそのまま u の初期値として用いてしまう。u の初期値は $y'+gy=7$ であり、-3 ではない。
- 小問 (i) で $g'(x)$ の項を忘れる。g は x に依存するので、gy は積の微分法で微分しなければならない。
- 二つの段階のどちらかで積分定数（constant of integration）を落とす。定数は二つあり、これが二つの初期条件に対応している。

STEP のその先へ

これは微分作用素（differential operator）を因数分解するという考え方である。D を $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ として、$(D+\mathrm{f})(D+\mathrm{g})y=\mathrm{h}$ と書ける。g は x に依存するので二つの因子は可換（commute）ではなく、そのために交差項 g' が現れるのである。g について得られた方程式は**リッカチ方程式**（Riccati equation）である。リッカチ方程式は非線形であるが、解が一つわかっていれば、ここで見たように、線形の二階の問題を二つの一階の問題に帰着させることができる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では、積分因子、階数低下法（reduction of order）、リッカチ方程式が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。