解答例

STEP III 2020、第 6 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と面積

STEP III 2020、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

3 つの小問はすべて同じ関数 $\cos\theta + \sqrt{\cos 2\theta}$ の上に組み立てられている。C_2 の方程式は r についての 2 次方程式であり、その 2 つの解は $\cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$ である。したがって C_2 は、C_1（大きい方の解）ともう 1 つの内側の分枝（branch）（小さい方の解）を合わせたものであり、2 つの分枝は判別式（discriminant）$\cos 2\theta$ が 0 になるところで出会う。これがわかれば、$r_+^2 - r_-^2$ が因数分解（factorise）できるので、分枝の間の面積は 1 つの積分にまとまる。

解答

小問 (i)

$y = \cos x + \sqrt{\cos 2x}$ とおく。これが実数となるのは $\cos 2x \geq 0$ のときであり、与えられた区間ではちょうど $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 全体である。この関数は偶関数（even function）なので、グラフは y 軸に関して対称である。

値。 $x = 0$ のとき $y = 2$ である。$x = \pm\frac{1}{4}\pi$ のとき $\cos 2x = 0$ であり、$y = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

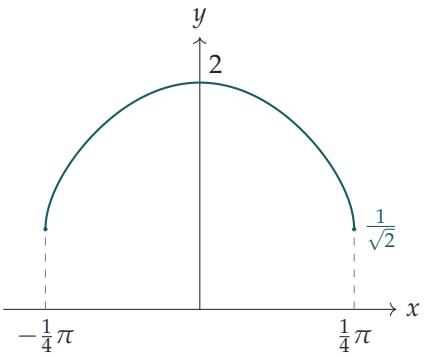
傾き。 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} < 0,$$

である。この範囲では両方の項が負だからである。よって x が 0 から $\frac{1}{4}\pi$ まで動くとき、y は 2 から $\frac{1}{\sqrt{2}}$ まで減少し、最大値は $(0, 2)$ でとる。$x \to \frac{1}{4}\pi^-$ のとき、$\sin 2x \to 1$ である一方 $\sqrt{\cos 2x} \to 0^+$ となるので、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to -\infty$ である。つまり曲線は端点で鉛

直な接線（tangent）をもつ。

$x = 0$ の近く。$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ と $\sqrt{\cos 2x} \approx \sqrt{1 - 2x^2} \approx 1 - x^2$ を用いると $y \approx 2 - \frac{3}{2}x^2$ が得られ、なめらかな極大となる。



小問 (ii)

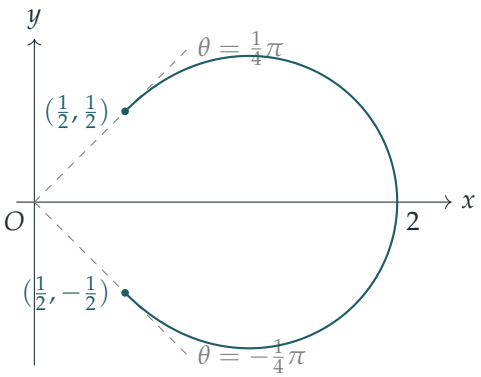
今度は同じ関数が、方向 θ における原点からの距離 r を与える。C_1 の端点は $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ にあり、これは直交座標では点 $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ である。$\theta = 0$ のとき曲線は $(2,0)$ にあり、これが O から最も遠い点である。r は θ について偶関数なので、C_1 は始線（initial line）に関して対称である。

考えてみよう 極座標（polar coordinates）で表された曲線において、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ が無限大になるとはどういう意味か。

小問 (i) より、$\theta \to \frac{1}{4}\pi^-$ のとき $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta \to -\infty$ である。その端の近くでは、θ はほとんど変わらないのに r は大きく変化するので、曲線は動径方向の直線 $\theta = \frac{1}{4}\pi$（直線 $y = x$）に沿って動いている。r は減少しているので、曲線は $y = x$ に沿って原点に向かって進みながら $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に到達する。特に、高さ $y = r\sin\theta$ は端点より手前で最大値をとらなければならない。実際

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

は $\theta = 0$ の近くでは正であり、$\theta \to \frac{1}{4}\pi$ のとき $-\infty$ に発散する。（最大の高さはおよそ 0.81 で、$\theta \approx 34°$ のときである。）よって C_1 は $(2,0)$ を通るアーチ状の曲線であり、$y = \frac{1}{2}$ より上に膨らんでから $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ まで下りてきて、そこで直線 $y = x$ に接する。軸の下側にはその鏡像がある。



小問 (iii)

2 つの分枝。方程式を r についての 2 次方程式とみなす：

$$r^2 - 2r\cos\theta + \sin^2\theta = 0 \iff r = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}.$$

$r_\pm = \cos\theta \pm \sqrt{\cos 2\theta}$ とおく。外側の分枝 r_+ はちょうど C_1 である。内側の分枝は $r_- \geq 0$ を満たす。なぜなら $\cos^2\theta \geq \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ であり、等号は $\sin\theta = 0$ のときに限り成り立つからである。よって r_- は正真正銘の極座標の曲線であり、原点に達するのは $\theta = 0$ のときだけである。

$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ において。ここでは $\cos 2\theta = 0$ なので、2 次方程式は重解をもつ：

$$r = \cos\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

両方の分枝が $(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ を通る。

r が小さいとき。r が小さければ、r^2 は $2r\cos\theta$ に比べて無視でき、また $\sin^2\theta = 2r\cos\theta - r^2$ が小さいので θ も小さくなければならない。すると $2r\cos\theta \approx \sin^2\theta$ であり、$\cos\theta \approx 1$、$\sin\theta \approx \theta$ を用いると

$$r \approx \frac{\sin^2\theta}{2\cos\theta} \approx \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

となり、求める結果が得られる。（同じことだが、$r_- \approx (1 - \frac{1}{2}\theta^2) - (1 - \theta^2) = \frac{1}{2}\theta^2$ である。）

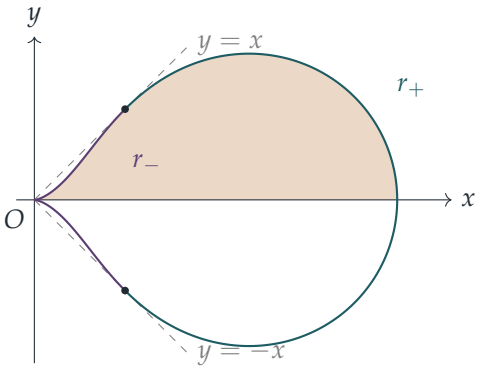
$r = 0$ の近くでのふるまい。ここでは $x = r\cos\theta \approx \frac{1}{2}\theta^2$、$y = r\sin\theta \approx \frac{1}{2}\theta^3$ なので $y^2 \approx 2x^3$ である。したがって内側の分枝は、$x > 0$ の側から上下両方向に始線に接しながら原点に入り込み、O で左向きにとがった**尖点**（cusp）をつくる。

$\theta = \pm\frac{1}{4}\pi$ の近くでのふるまい。方程式を陰関数微分（implicit differentiation）すると

$$(2r - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}r + (2r\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{\cos\theta - r}{\sin\theta\,(r + \cos\theta)}.$$

$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ において分子は 0 であり分母は 0 でないので、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r = 0$ である。また曲線全体で $\theta \le \frac{1}{4}\pi$ である。よって θ はそこで最大値をとり、曲線は動径方向の直線 $y = x$ に接する。外側の分枝は $y = x$ に沿って O に向かって入ってきて、内側の分枝は $y = x$ に沿って O から離れる向きに出ていき、2 つは $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ でなめらかにつながる。角はできない。対称性により、$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ でも同じことが起こる。

以上より、C_2 は始線に関して対称な閉曲線であり、O の尖点を先端とする涙のしずくのような形をしている。その外側の縁は C_1 であり、内側の縁は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ から O の尖点へと下りていき、再び $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ へと出ていく。



（図の描画には $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin u$ を用いており、これにより $\sqrt{\cos 2\theta} = \cos u$ となる。u を 1 周させると、無限大の傾きを生じることなく C_2 全体を描くことができる。）

面積。 $0 \le \theta \le \frac{1}{4}\pi$ に対して、角 θ の半直線が C_2 の内部にあるのはちょうど $r_- \le r \le r_+$ のときである。よって網掛け部分の面積は 2 つの極座標の扇形（sector）の面積の差である：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\left(r_+^2 - r_-^2\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(r_+ - r_-)(r_+ + r_-)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot 2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/4} \cos\theta\sqrt{1 - 2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

$\sqrt{2}\sin\theta = \sin u$ と置換（substitution）すると $\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \cos u\,\mathrm{d}u$ であり、θ が 0 から $\frac{1}{4}\pi$ まで動くとき u は 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動く：

$$A = 2\int_0^{\pi/2} \cos u\cdot\frac{\cos u}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

これが求める結果である。（同じことだが、置換 $s = \sqrt{2}\sin\theta$ により積分は $\sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,\mathrm{d}s$ となり、これは単位円板の 4 分の 1 の面積の $\sqrt{2}$ 倍である。）

検算

- $\theta = 0$ のとき $r_{\pm} = 1 \pm 1$ であり、点 $(2,0)$ と O が得られる。これは概形と矛盾しない。
- $\theta = 0.01$ のとき $r_{-} = \cos 0.01 - \sqrt{\cos 0.02} \approx 5.0002 \times 10^{-5}$ であり、$\frac{1}{2}\theta^2 = 5 \times 10^{-5}$ とよく一致する。
- 数値的には $\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.11072$ であり、$\frac{1}{2}(r_{+}^2 - r_{-}^2)$ を $[0, \frac{1}{4}\pi]$ で直接数値積分すると、小数第 6 位まで同じ値が得られる。
- 大まかな評価：C_2 の上半分は面積およそ 1.62 の長方形 $[0,2] \times [0,0.81]$ の内部にあり、頂点が $(\frac{1}{2},0)$、$(2,0)$、$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である面積 0.375 の三角形を含む。値 1.11 はこれらの間に妥当に収まっている。

よくある間違い

- C_1 を $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ で角があるように、あるいは $y = x$ を横切るように描いてしまう：$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ が無限大であることは、曲線がそこで動径方向の直線に接することを意味する。
- O の部分を尖点ではなく、なめらかに丸い端として描いてしまう：$y^2 \approx 2x^3$ は典型的な尖点の形である。
- $\int \frac{1}{2}r_{+}^2 \,\mathrm{d}\theta$ だけを計算してしまう：これは C_1 までの面積であり、内側の分枝の内側にある空洞の部分まで含んでしまう。

STEP のその先へ

原点の近くの曲線 $y^2 = 2x^3$ は半 3 次放物線（semicubical parabola）であり、尖点の標準的な例である。尖点は、なめらかなパラメータ表示においてある瞬間に速度が o になるときに必ず現れる。ここでは $(x,y) \approx (\frac{1}{2}\theta^2, \frac{1}{2}\theta^3)$ の導関数が $\theta = 0$ で o になっている。代数曲線のこのような特異点を分類することは、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。極座標の曲線とその面積は、囲まれた面積をその境界を一周する線積分として表すグリーンの定理（Green's theorem）へも自然につながっていく。このような曲線を幾何学的な視点から眺めるには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的にとらえる複素解析）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。