解答例

STEP III 2020、第 5 問

純粋数学 ・ 部分分数分解

STEP III 2020、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の恒等式（identity）は、有限の等比級数（geometric series）の和の公式を姿を変えて表したものであり、これこそが $(1-(x/k)^n)/(x-k)$ を具体的な多項式（polynomial）に書き換える道具となる。これにより、面倒な係数比較（comparing coefficients）をすることなく、$1/(x^n(x-k))$ の完全な部分分数分解（partial-fraction decomposition）が得られる。さらに微分することで、**重複する**因数（repeated factor）$(x-k)^2$ をもつ場合の分解が得られ、最後の積分はすべての項を直接積分できる特別な場合にすぎない。

解答

冒頭の恒等式

右辺を展開し、二つの和に分ける。

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r-1} &= \sum_{r=1}^{n} x^{n-r+1}y^{r-1} - \sum_{r=1}^{n} x^{n-r}y^{r} \\ &= (x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}) - (x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= x^n - y^n,\end{aligned}$$

となる。なぜなら、x^n（一つ目の和の $r=1$ の項）と y^n（二つ目の和の $r=n$ の項）を除くすべての項は、各括弧の中に一度ずつ現れて打ち消し合うからである。

小問 (i)(a)

$\mathrm{F}(x) = \dfrac{A}{x-k} + \dfrac{\mathrm{f}(x)}{x^n}$ の両辺に $x^n(x-k)$ を掛けると

$$1 = Ax^n + \mathrm{f}(x)(x-k).$$

を得る。これは多項式どうしの恒等式であり、$x \neq 0, k$ であるすべての x で成り立つから、すべての x で成り立つ（無限個の点で一致する二つの多項式は等しい）。$x = k$ を代入すると $1 = Ak^n$ となるので、$A = 1/k^n$ である（$k \neq 0$ だからこれは許される）。すると

$$\mathrm{f}(x)(x-k) = 1 - \frac{x^n}{k^n}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{x-k}\left(1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n\right)$$

が $x \neq k$ に対して成り立ち、示すべきことが得られた。

考えてみよう これを分母に $x-k$ を含まない形にするにはどうすればよいか。

冒頭の恒等式で x を 1 に、y を x/k に置き換えて用いる。

$$1 - \left(\frac{x}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{x}{k}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{x}{k}\right)^{r-1} = -\frac{x-k}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}.$$

$x-k$ で割ると

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{x^{r-1}}{k^{r-1}}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{f}(x)}{x^n} = -\frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{r-1}x^{n+1-r}}.$$

（これにより、f が確かに多項式であることも確認できる。）ここで $s = n+1-r$ として添字を付け替える（re-index）。r が $1, \ldots, n$ を動くとき s も同じ範囲を動き、$r - 1 = n - s$ となるので、和は $\sum_{s=1}^{n} 1/(k^{n-s}x^s)$ となる。したがって

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{k^n(x-k)} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{k^{n-r}x^r}.$$

小問 (i)(b)

$x^n\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{x-k}$ であるから、両辺を積の微分法（product rule）で微分すると

$$nx^{n-1}\mathrm{F}(x) + x^n\mathrm{F}'(x) = -\frac{1}{(x-k)^2}.$$

を得る。$-x^n$ で割ると（$x \neq 0$ なので問題ない）

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = -\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}'(x).$$

となる。小問 (a) より

$$-\frac{n}{x}\mathrm{F}(x) = -\frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

であり、小問 (a) の結果を項ごとに微分すると

$$-\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{k^{n-r}x^{r+1}} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{k^{n+1-r}x^{r+1}}.$$

となる。これらを足すと二つの和がまとまり

$$\frac{1}{x^n(x-k)^2} = \frac{1}{k^n(x-k)^2} - \frac{n}{xk^n(x-k)} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n-r}{k^{n+1-r}x^{r+1}},$$

となって、求める結果が得られる。

小問 (ii)

小問 (b) で $n=3$、$k=1$ とする。和の $r=3$ の項は消えて

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{x(x-1)} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

となる。真ん中の項はもう一度分解する必要がある：$\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$。$[2, N]$ 上ではすべてが連続（continuous）で $x-1 > 0$ であるから、そこでの原始関数（antiderivative）の一つは

$$G(x) = -\frac{1}{x-1} - 3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2},$$

であり、

$$\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = G(N) - G(2).$$

となる。

考えてみよう なぜ二つの対数をまとめたままにしておかなければならないのか。

別々に見ると、$-3\ln(N-1)$ と $+3\ln N$ はそれぞれ無限大に発散するので、項ごとに極限をとることはできない。まとめておけば、ln は 1 で連続なので、$N \to \infty$ のとき $\ln((N-1)/N) = \ln(1-\frac{1}{N}) \to \ln 1 = 0$ となる。$G(N)$ の残りの三つの項は明らかに 0 に収束するので、$G(N) \to 0$ である。

最後に

$$G(2) = -1 - 3\ln\tfrac{1}{2} - 1 - \tfrac{1}{8} = 3\ln 2 - \tfrac{17}{8},$$

であるから

$$\lim_{N\to\infty}\int_2^N \frac{1}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{8} - 3\ln 2.$$

を得る。

検算

- 被積分関数（integrand）は正であるから、答えは正でなければならない。実際 $\frac{17}{8} - 3\ln 2 \approx 2.1250 - 2.0794 = 0.0456$ である。
- 答えは小さくもなければならない。被積分関数は $x = 2$ で $\frac{1}{8}$ であり、おおよそ x^{-5} のように減少する。大まかに $\frac{1}{8}(2/x)^5$ で上から抑えると、高々 $\int_2^\infty 4x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}$ となる。数値積分を行うと、値 $0.045558\ldots$ が小数点以下多くの桁まで確認できる。
- 小問 (b) で $n = 1$ としてみる。和は消え（その唯一の項は $n - r = 0$ をもつ）、右辺は $\dfrac{1}{k(x-k)^2} - \dfrac{1}{xk(x-k)} = \dfrac{x-(x-k)}{xk(x-k)^2} = \dfrac{1}{x(x-k)^2}$ となり、確かにあるべき形になっている。

よくある間違い

- $1 - x/k$ を $-(x-k)/k$ と書き直すときに符号を誤る。
- 小問 (a) で和の添字の付け替えを忘れ、k と x の指数が目標の式と合わなくなる。
- $\ln\big((x-1)/x\big)$ を二つの対数に分けてしまい、積分が発散（diverge）すると主張したり、「$\infty - \infty = 0$」と書いたりする。

STEP のその先へ

ここで組み立てたのは、x^n と $(x-k)^m$ の形の因数に対する一般的な部分分数分解である。x について（あるいは根 k について）微分することは、重複因数の項を生み出す標準的な方法である。小問 (ii) のように無限区間での積分が収束するかどうかを判定することは、大学最初の解析学（analysis）の講義で扱う広義積分（improper integral）の主題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、こうした極限を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。