解答例

STEP III 2020、第 4 問

純粋数学 • 鏡映と回転の行列

STEP III 2020、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の結果こそが、形を変えたこの問題全体である。$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ を引くと点は平面までまっすぐ下ろされるので、その 2 倍を引けば、点は平面の反対側へ同じ距離だけ運ばれる。これが鏡映（reflection）である。鏡映を $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}-2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ と書いてしまえば、その行列（matrix）、$\mathbf{n}$ を軸とする半回転（half-turn）、そしてそれらの積は、ほとんど計算せずに求められる。

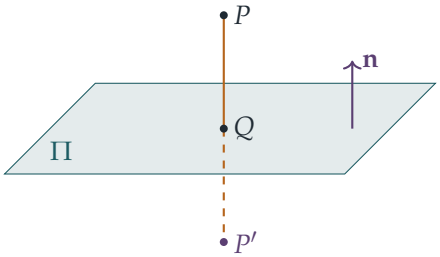
解答

冒頭の結果

$\mathbf{q}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ とおく。$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ であるから

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=0,$$

となり、Q は Π 上にある。また $\overrightarrow{PQ}=\mathbf{q}-\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ であり、これは法線ベクトル（normal）$\mathbf{n}$ のスカラー倍である。P は Π 上にない（したがって $\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}\neq 0$）ので、これは零ベクトルではない。よって PQ は Π に垂直であり、示すべきことが示された。



この図は、これから向かう先も示している。Π に関する P の鏡像 P' は、P が Q の上にあるのと同じ距離だけ Q の向こう側にあるので、その位置ベクトル（position vector）は

$$\mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}.$$

である（P が Π 上にあるとき、この式は P 自身を与えるが、これもまた正しい）。

小問 (i)

$\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$ とする。$a^2+b^2+c^2 = 1$ であるから、これは単位法線ベクトル（unit normal）である。$\mathbf{i}$ については $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n} = a$ であるから

$$T(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2a\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2\\-2ab\\-2ac\end{pmatrix},$$

となる。ここで第 1 成分には $1 = a^2+b^2+c^2$ を用いた。これが求める像である。同様に、$\mathbf{j}\cdot\mathbf{n} = b$、$\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = c$ を用いて

$$T(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix}-2ab\\a^2+c^2-b^2\\-2bc\end{pmatrix}, \qquad T(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix}-2ac\\-2bc\\a^2+b^2-c^2\end{pmatrix}.$$

を得る。$\mathbf{M}$ の各列は $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ の像であるから

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}b^2+c^2-a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & a^2+c^2-b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & a^2+b^2-c^2\end{pmatrix} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

である。

小問 (ii)

与えられた行列を $\mathbf{M}$ と照らし合わせる。対角成分をそれぞれ $1-2a^2$、$1-2b^2$、$1-2c^2$ と書くと

$$1-2a^2 = 0.64, \quad 1-2b^2 = 0.36, \quad 1-2c^2 = 0 \implies a^2 = 0.18, \quad b^2 = 0.32, \quad c^2 = 0.5.$$

となる。よって $|a| = \frac{3}{5\sqrt{2}}$、$|b| = \frac{4}{5\sqrt{2}}$、$|c| = \frac{5}{5\sqrt{2}}$ である。

考えてみよう 対角成分からわかるのは a^2, b^2, c^2 だけである。符号はどのように決めればよいか。

非対角成分から積がわかる：

$$-2ab = 0.48, \quad -2ac = 0.6, \quad -2bc = -0.8 \implies ab = -0.24, \quad ac = -0.3, \quad bc = 0.4.$$

よって b と c は同符号であり、a はそれらと異符号である。(a,b,c) を $(-a,-b,-c)$ に置き換えても何も変わらない（同じ平面である）ので、$c>0$ としてよい。すると

$$(a,b,c) = \tfrac{1}{5\sqrt{2}}(-3,\,4,\,5).$$

を得る。これらの値から $ab = -\frac{12}{50}$、$ac = -\frac{15}{50}$、$bc = \frac{20}{50}$ となり、独立な 6 つの成分がすべて一致する。全体に $-5\sqrt{2}$ を掛けると、平面は

$$3x - 4y - 5z = 0.$$

である。

小問 (iii)

任意のベクトルを $\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n})$ と、軸に沿う部分と軸に垂直な部分に分解する（冒頭の結果）。軸のまわりの角 π の回転（rotation）は第 1 の部分をそのまま残し、第 2 の部分の向きを反転させるので

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}) = 2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{x}.$$

となる。これはちょうど $-T(\mathbf{x})$ である。したがって $\mathbf{N} = 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - \mathbf{I} = -\mathbf{M}$、すなわち

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} a^2-b^2-c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & b^2-a^2-c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & c^2-a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

である。

小問 (iv)

> **考えてみよう** ここで a、b、c を成分とする 3×3 行列を 2 つ掛け合わせる必要があるだろうか。

その必要はない。(iii) より $\mathbf{NM} = -\mathbf{M}^2$ である。同じ平面に関して 2 回鏡映すると、すべての点はもとの位置に戻るので、$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ である（代数的には、$\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n} = 1$ であるから $(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})^2 = \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathsf{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}$ となる）。よって

$$\mathbf{NM} = -\mathbf{I},$$

であり、これはすべての $\mathbf{x}$ を $-\mathbf{x}$ に移す。これは原点に関する対称移動であり、中心反転（central inversion）、あるいは原点を中心とする倍率 -1 の拡大（enlargement）とも呼ばれる。これが a、b、c にまったく依存しないことに注意しよう。

検算

- $\mathbf{M}$ の各列は単位ベクトル（unit vector）になるはずである。第 1 列については $(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2+4a^2c^2=(b^2+c^2+a^2)^2=1$ となる。
- (ii) では、法線ベクトル $(3,-4,-5)$ はその逆ベクトルに移されるはずである。与えられた行列はこれを $(1.92-1.92-3,\ 1.44-1.44+4,\ 1.8+3.2)=(-3,4,5)$ に移す。正しい。
- $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ とすると、$\mathbf{M}=\mathrm{diag}(1,1,-1)$ は $z=0$ に関する鏡映、$\mathbf{N}=\mathrm{diag}(-1,-1,1)$ は z 軸のまわりの半回転となる。その積は明らかに $-\mathbf{I}$ である。
- 1000 個のランダムな単位ベクトル $\mathbf{n}$ を用いたコンピュータによる検算で、$\mathbf{M}$ の式、$\mathbf{N}$ が $\mathbf{n}$ を固定し垂直なベクトルの向きを反転させること、そして $\mathbf{NM}=-\mathbf{I}$ が確かめられた。(ii) の行列も 10^{-15} 以内の誤差で再現された。

よくある間違い

- $\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ を鏡映として用いてしまう。これは垂線の足（foot of the perpendicular）であり、係数 2 が抜けている。
- (ii) で、a,b,c の符号を平方根からそれぞれ独立に選んでしまう。相対的な符号を決めるのは非対角成分だけである。
- $\mathbf{NM}$ を「単位行列」としてしまう。鏡映の行列式（determinant）は -1、回転の行列式は $+1$ であるから、積の行列式は -1 である。3 次元では $\det(-\mathbf{I})=-1$ であり、これと矛盾しない。

STEP のその先へ

行列 $\mathbf{I}-2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ は**ハウスホルダー**（*Householder*）**鏡映**（Householder reflection）と呼ばれる。数値線形代数（numerical linear algebra）では、行列を三角行列の形に変形するためにこれが絶えず用いられる。また、n 次元の任意の直交行列（orthogonal matrix）は、高々 n 個のこのような鏡映の積で表される。小問 (iv) はこの構造の小さな例である：$\mathbb{R}^3$ において、半回転と、その軸に垂直な平面に関する鏡映を合成すると $-\mathbf{I}$ が得られる。直交行列、射影（projection）、鏡映については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。