解答例

STEP III 2020、第 3 問

純粋数学 • 図形における複素数

STEP III 2020、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

複素平面（complex plane）において、点 a のまわりの角 θ の回転（rotation）は単に $z \mapsto a + (z-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ であるから、G_{AB} は a と b の具体的な一次結合（linear combination）として表される。小問 (i) でこの式が得られれば、幾何は代数に変わる。平行四辺形（parallelogram）であることは頂点に関する一次の条件であり、正三角形（equilateral triangle）であることは、ある辺が別の辺を一定の角だけ回転させたものになっているということである。問題全体は ω のべきに関するいくつかの事実の上に成り立っている。

解答

以下を通して $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ とする。したがって $\omega^* = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ であり、さらに

$$\rho = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

とおく。用いる事実は次の三つである。

$$\omega^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}, \qquad \omega^3 = \mathrm{i}, \qquad \omega - \omega^* = 2\mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} = \mathrm{i}.$$

小問 (i)

時計回り（clockwise）に $\frac{1}{3}\pi$ だけ回転することは、ρ を掛けることである。A のまわりに回転するとは、変位 $b-a$ を回転させてから a に加え戻すことであるから、

$$k = a + (b-a)\rho.$$

したがって、ABK の重心（centroid）は

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(a+b+k) = \tfrac{1}{3}[(2-\rho)\,a + (1+\rho)\,b].$$

である。ここで二つの係数を整理する。

$$2-\rho = \tfrac{3}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega,$$
$$1+\rho = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3}\,\omega^*.$$

よって

$$g_{ab} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{3}\,\omega a + \sqrt{3}\,\omega^* b) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\omega a + \omega^* b),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

四角形 $PQRS$（頂点はこの順）が平行四辺形であるのは、ちょうど $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$、すなわち $q-p = r-s$ のとき、言い換えれば

$$p - q + r - s = 0.$$

のときである。（これは対角線 PR と QS の中点が一致すると言うのと同じである。）したがって、Q_1 が平行四辺形であるための必要十分条件は $a-b+c-d=0$ であり、Q_2 が平行四辺形であるための必要十分条件は

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = 0.$$

である。四つの点それぞれに小問 (i) を用いると、

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\,(g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da}) &= (\omega a + \omega^* b) - (\omega b + \omega^* c) + (\omega c + \omega^* d) - (\omega d + \omega^* a)\\ &= (\omega - \omega^*)a - (\omega - \omega^*)b + (\omega - \omega^*)c - (\omega - \omega^*)d\\ &= \mathrm{i}\,(a - b + c - d).\end{aligned}$$

ゆえに

$$g_{ab} - g_{bc} + g_{cd} - g_{da} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\,(a-b+c-d),$$

であり、$\mathrm{i}/\sqrt{3} \neq 0$ であるから、一方の辺が 0 になるのは他方の辺が 0 になるとき、かつそのときに限る。したがって、Q_1 が平行四辺形であることと Q_2 が平行四辺形であることは同値である。

考えてみよう Q_2 が平行四辺形の条件を満たしながら、二つの頂点が一致してつぶれてしまうことはありうるだろうか？

ある特別な場合にはありうる。ABC が時計回りに名前をつけた正三角形であるとき、B を A のまわりに時計回りに回転させると C に重なるので、G_{AB} と G_{BC} はともに ABC の重心になる。ひし形（rhombus）$ABCD$ を完成させると、Q_2 はつぶれて線分になる。この場合にも条件 $p-q+r-s=0$ は成り立つので、この同値性は実際にはこのベクトルの条件についての主張であり、このような問題で「平行四辺形」が意味するのはまさにこの条件である。

小問 (iii)

T_2 のある辺がベクトルとして、別の辺を一定の角だけ回転させたものであることを示す。小問 (i) より

$$\sqrt{3}\,(g_{bc}-g_{ab}) = (\omega b+\omega^* c)-(\omega a+\omega^* b) = -\omega a+\mathrm{i}\,b+\omega^* c,$$
$$\sqrt{3}\,(g_{ca}-g_{bc}) = (\omega c+\omega^* a)-(\omega b+\omega^* c) = \omega^* a-\omega b+\mathrm{i}\,c,$$

である。ここで各行で $\omega-\omega^*=\mathrm{i}$ を用いた。

> **考えてみよう** どのような数 λ を掛ければ、二つ目の括弧が一つ目の括弧になるだろうか？

a の係数を比べると $\lambda\omega^* = -\omega$ でなければならないから、$\lambda = -\omega/\omega^* = -\omega^2 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}$ である。この同じ λ は b と c についてもうまくいく。

$$\lambda\cdot(-\omega) = \omega^3 = \mathrm{i},$$
$$\lambda\cdot\mathrm{i} = -\omega^2\cdot\omega^3 = -\omega^5 = -\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6} = \omega^*.$$

よって、すべての a, b, c に対して

$$g_{bc}-g_{ab} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}\,(g_{ca}-g_{bc}).$$

が成り立つ。$|\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3}|=1$ であるから、絶対値（modulus）をとると $G_{AB}G_{BC} = G_{BC}G_{CA}$ となる。また、T_2 に沿って進む向きは G_{BC} で $\frac{2}{3}\pi$ だけ曲がるので、T_2 の G_{BC} における内角は $\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi$ である。等しい二辺が角 $\frac{1}{3}\pi$ をはさむ三角形は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、底角は $\frac{1}{2}(\pi-\frac{1}{3}\pi)=\frac{1}{3}\pi$ であるから、すべての角が $\frac{1}{3}\pi$ となり、T_2 は正三角形である。

唯一の例外は $g_{ca}=g_{bc}$ の場合であり、このときは上の関係式から $g_{ab}=g_{bc}$ も成り立つので、T_2 は一点に縮んでしまう。$\omega^* a-\omega b+\mathrm{i}c=0$ に ω を掛けると $a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}b+\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}c=0$ となり、これが起こるのはちょうど ABC 自身が時計回りに名前をつけた正三角形であるとき（小問 (ii) の注意で述べた場合）である。それ以外のすべての三角形 T_1 は、退化した（degenerate）ものも含めて、本当の正三角形 T_2 を与える。

検算

- $a = 0, b = 1$ とする。このとき $k = \rho$ であり、$0, 1, \rho$ の重心は $\frac{1}{3}(1+\rho) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$ である。公式からは $\omega^*/\sqrt{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}$ が得られ、同じ数になる。
- $a = 0, b = 1, c = \mathrm{i}$（直角三角形）とすると、$T_2$ の三点の互いの距離はすべて約 1.1154 になる。10^4 個のランダムな三角形と四角形についてコンピュータで確かめたところ、小問 (ii) と (iii) の恒等式が丸め誤差の範囲で成り立つことが確認された。

よくある間違い

- b を A のまわりではなく原点のまわりに回転させて、$k = b\rho$ と書いてしまう。
- 時計回りの回転に $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\pi/3}$ を用いてしまう。時計回りは負の向きである。
- 小問 (ii) で一方向だけを証明してしまう。「必要十分」であることを保証するのは、係数 $\mathrm{i}/\sqrt{3}$ が 0 でないという事実である。

STEP のその先へ

小問 (iii) はナポレオン（Napoleon）の定理である。任意の三角形の各辺の上に正三角形を立てる（ここでは ABC を反時計回りに名前をつけたときに外側に立てる）と、それらの重心は正三角形をなす。複素数による証明がうまくいくのは、回転も重心もどちらも平面の線形写像（linear map）だからである。これが幾何学における変換群（transformation group）の研究の出発点となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の掛け算をこのように幾何的に見る見方を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。