解答例

STEP III 2020、第 2 問

純粋数学 ・ 双曲線関数のグラフ

STEP III 2020、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を行い、$\cosh^2 = 1 + \sinh^2$ を繰り返し用いてすべてを sinh に戻す。すると第 2 次導関数に関する条件が因数分解され、その因数の一つは曲線自身の方程式になる。直線 $x + y = a$ については、$y = a - x$ を代入してすべてを指数関数で表す。実数の交点が存在するためには判別式（discriminant）が非負でなければならず、そこから $\cosh a$ に対する評価が得られる。

解答

小問 (i)

sinh は $\mathbb{R}$ の全単射（bijection）であるから、各 x に対して $\sinh y = 2k - \sinh x$ を満たす y がちょうど一つ存在する。よって C はすべての実数 x で定義された関数 $y = \operatorname{arsinh}(2k - \sinh x)$ のグラフであり、陰関数微分を行ってよい。

$$\cosh x + \cosh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cosh x}{\cosh y}.$$

$\cosh x \geq 1$ であるから、傾きは決して 0 にならない（常に負である）。したがって C は停留点（stationary point）をもたない。

$y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ と書いて、もう一度微分すると

$$\sinh x + \sinh y \, (y')^2 + \cosh y \, y'' = 0.$$

$y' = -\cosh x / \cosh y$ を代入し、全体に $\cosh^2 y$ を掛けると

$$\begin{aligned}\cosh^3 y\, y'' &= -\left(\sinh x \cosh^2 y + \sinh y \cosh^2 x\right)\\ &= -\left(\sinh x\,(1+\sinh^2 y) + \sinh y\,(1+\sinh^2 x)\right)\\ &= -(\sinh x + \sinh y) - \sinh x \sinh y\,(\sinh y + \sinh x)\\ &= -(\sinh x + \sinh y)(1 + \sinh x \sinh y).\end{aligned}$$

C 上では第1の因数は $2k$ に等しいから

$$y'' = -\frac{2k\,(1+\sinh x \sinh y)}{\cosh^3 y}.$$

$k > 0$ かつ $\cosh y > 0$ であるから、$y'' = 0$ となるのは $1 + \sinh x \sinh y = 0$ のとき、かつそのときに限る。これが示すべきことであった。

考えてみよう $y'' = 0$ だけで変曲点であるといえるだろうか？

いえない。y'' の符号が変わることも必要である。$s = \sinh x$、$t = \sinh y$ とおく。$y'' = 0$ となる点では $s + t = 2k$ かつ $st = -1$ であるから、s と t は $u^2 - 2ku - 1 = 0$ の解である：

$$u = k \pm \sqrt{k^2+1}.$$

一方の解は正、他方は負であり、s はどちらの値もとることができ、t はもう一方の値となる。曲線に沿って、$1 + st = 1 + s(2k - s) = -(s^2 - 2ks - 1)$ は相異なる二つの単解をもつ s の2次式であるから、それぞれの解で符号が変わる。$s = \sinh x$ は x について増加であるから、y'' は確かに両方の点で符号を変える。したがって変曲点（point of inflection）は

$$\left(\operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1})\right) \quad \text{および}$$
$$\left(\operatorname{arsinh}(k-\sqrt{k^2+1}),\ \operatorname{arsinh}(k+\sqrt{k^2+1})\right).$$

である。これらは直線 $y = x$ に関して互いに対称である。C の方程式は x と y について対称であるから、これは予想どおりである。

小問 (ii)

直線上では $y = a - x$ である。$2\sinh u = \mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}$ と書くと、C の方程式を2倍したものは

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{a-x} - \mathrm{e}^{x-a} = 4k.$$

となる。e^x を掛けると $\mathrm{e}^{2x} - 1 + \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a} = 4k\mathrm{e}^x$、すなわち

$$\mathrm{e}^{2x}(1 - \mathrm{e}^{-a}) - 4k\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^a - 1) = 0,$$

を得る。これが求める方程式である。

考えてみよう そのような点が存在することから、この方程式について何がわかるだろうか？

これは（最高次の係数が 0 でなければ）$X = \mathrm{e}^x$ についての 2 次方程式であり、実数解をもたなければならない。

まず $a \neq 0$ である。実際、$a = 0$ ならば方程式は $-4k\mathrm{e}^x = 0$ に帰着するが、$k > 0$ であるからこれは不可能である。よって $\cosh a > 1$ である。

$a \neq 0$ のとき最高次の係数 $1 - \mathrm{e}^{-a}$ は 0 でないから、この 2 次方程式が実数解をもつのは判別式が非負のときに限る：

$$16k^2 - 4(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) \geq 0.$$

ここで $(1 - \mathrm{e}^{-a})(\mathrm{e}^a - 1) = \mathrm{e}^a - 2 + \mathrm{e}^{-a} = 2\cosh a - 2$ であるから、条件は $16k^2 \geq 8(\cosh a - 1)$、すなわち $\cosh a \leq 2k^2 + 1$ である。以上をまとめて

$$1 < \cosh a \leq 2k^2 + 1.$$

よって C 上のすべての点で $x + y$ は $-2\operatorname{arsinh} k$ と $2\operatorname{arsinh} k$ の間にあり（$\cosh(2\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2\sinh^2(\operatorname{arsinh} k) = 1 + 2k^2$ だからである）、かつ $x + y \neq 0$ である。

実は C 上では $x + y > 0$ である。$a < 0$ ならば $1 - \mathrm{e}^{-a} < 0$ かつ $\mathrm{e}^a - 1 < 0$ であるから、2 次方程式の三つの係数はすべて負となり、正の解 X をもたない。（同値な見方として、$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$ であり、これは $x + y$ と同じ符号をもつ。）最大値 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ は $x = y = \operatorname{arsinh} k$ でとられ、そこでは判別式が 0 となり、直線はちょうど C に接する。

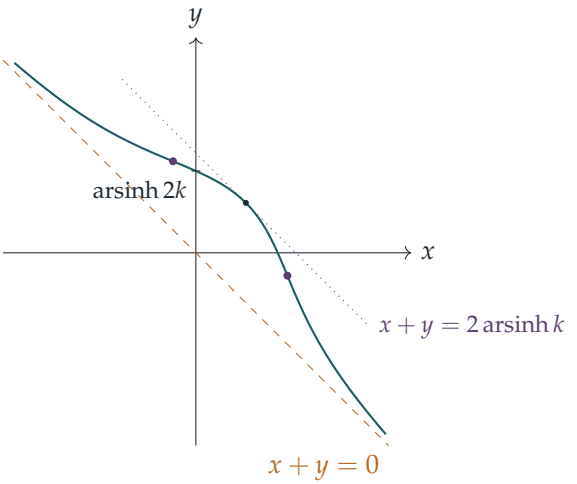
小問 (iii)

これまでにわかったことをまとめる：

- C は直線 $y = x$ に関して対称であり、この直線とは $(\operatorname{arsinh} k, \operatorname{arsinh} k)$ でのみ交わる。その点での傾きは -1 である。
- y はすべての x に対して定義され、傾きは常に負である。曲線は座標軸と $(\operatorname{arsinh} 2k, 0)$ および $(0, \operatorname{arsinh} 2k)$ で交わる。
- $0 < x + y \leq 2\operatorname{arsinh} k$ であるから、C は直線 $x + y = 0$ より上側、かつ直線 $x + y = 2\operatorname{arsinh} k$ 上またはその下側の帯状領域にある。後者の直線は $y = x$ 上の点で C に接する。

- $x \to +\infty$ のとき $\sinh y = 2k - \sinh x \to -\infty$ であり、$\mathrm{e}^{-y} \approx \mathrm{e}^{x} - 4k$ となるから、$x + y \approx -\ln(1 - 4k\mathrm{e}^{-x}) \approx 4k\mathrm{e}^{-x} \to 0^{+}$ である。対称性により、$x \to -\infty$ のときも同様である。よって $x + y = 0$ は両端での漸近線（asymptote）であり、曲線は上側から近づく。
- y'' の式から、曲線は二つの変曲点の間、すなわち $1 + \sinh x \sinh y > 0$ となるところ（たとえば $y = x$ 上の点）で凹（concave、接線より下側にある）であり、その外側では凸（convex）である。

図は $k = 1$ の場合で、変曲点を印で示してある。



検算

- $k = 1$ のとき、変曲点は $\left(\operatorname{arsinh}(1+\sqrt{2}), \operatorname{arsinh}(1-\sqrt{2})\right) \approx (1.615, -0.403)$ とその鏡像である。$y = \operatorname{arsinh}(2 - \sinh x)$ の二階差分をこれらの点の両側で調べると、そこで y'' の符号が変わることが確かめられ、$-8 \le x \le 8$ の範囲を走査しても y'' の零点は他に見つからない。
- 式 $y'' = -2k(1 + \sinh x \sinh y)/\cosh^{3} y$ は、多数の無作為な点といくつかの k の値について、数値的に求めた第 2 次導関数と一致する。
- $k = 1$、$x = 6$ のとき $x + y \approx 0.00996$ であり、予測値 $4\mathrm{e}^{-6} \approx 0.00992$ に近い。主張どおり、漸近線には上側から近づく。
- $x = y = \operatorname{arsinh} k$ では $\cosh(x + y) = 1 + 2\sinh^{2} x = 1 + 2k^{2}$ であり、(ii) の上界が達成される。

よくある間違い

- $y'' = 0$ で止めてしまい、y'' の符号が変わることを確かめない。この問題では実際に符号が変わるが、それを述べる必要がある。
- $a = 0$ を除外し忘れる。これこそが左側の不等式を厳密な不等号にしている理由である。
- 変曲点を一つしか書かない。$u^2 - 2ku - 1 = 0$ のどちらの解も $\sinh x$ になりうるので、$y = x$ に関して対称な二つの点が得られる。

STEP のその先へ

回転した座標 $u = x + y$、$v = x - y$ を用いると、この曲線の姿は明快になる。恒等式 $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{u}{2}\cosh\frac{v}{2}$ により C は $\sinh\frac{u}{2} = k\operatorname{sech}\frac{v}{2}$ となり、漸近線 $u = 0$ の上にある一つの山となる。対称性に適合した座標を選ぶことは、大学 1 年の微積分と線形代数を通じて繰り返し現れる主題である（二次形式（quadratic form）の対角化も同じ考え方である）。陰関数で表される曲線、そして方程式 $F(x, y) = 0$ が本当に y を x の滑らかな関数として定めるのはどのようなときかという問題は、陰関数定理（implicit function theorem）の主題である。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、その背後にある 1 変数の解析を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。