解答例

STEP III 2020、第 11 問

確率・統計 ・ 確率変数の関数

STEP III 2020、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

狭義単調減少関数（strictly decreasing function）は不等式の向きを逆にする。さらに f は自分自身の逆関数（inverse function）なので、$\mathrm{f}(X) \leq y$ の両辺に適用すれば、X だけに関する事象が得られる。期待値（expectation）は部分積分（integration by parts）によって求まり、これにより f' が f に置き換わる。小問 (ii) では、Z と X の関係が 2 つの変数について対称なので、自己逆（self-inverse）な f を用いて $Z = \mathrm{f}(X)$ と書け、小問 (i) が使える。すると、示すべき不等式は分散（variance）が正であるという主張にほかならない。

解答

小問 (i)

f^{-1} は $[a, b]$ 全体で定義されているので、f は $[a, b]$ からそれ自身への全単射（bijection）であり、したがって Y は $[a, b]$ に値をとる。$y \in [a, b]$ を固定する。f は狭義単調減少なので、不等式の両辺に適用すると不等号の向きが逆になる。また $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ である。よって $x \in [a, b]$ に対して

$$\mathrm{f}(x) \leq y \iff \mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) \geq \mathrm{f}(y) \iff x \geq \mathrm{f}(y).$$

（逆向きの含意も同様に、$x \geq \mathrm{f}(y)$ に f を適用すれば成り立つ。）X は $[a, b]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、$\mathrm{f}(y) \in [a, b]$ であるから、

$$\mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \geq \mathrm{f}(y)) = \frac{b - \mathrm{f}(y)}{b - a},$$

となり、題意が示された。

微分すると、Y の確率密度関数（probability density function）は

$$g(y) = -\frac{\mathrm{f}'(y)}{b-a} \quad \text{for } a \le y \le b,$$

であり、それ以外ではゼロである。f は減少関数なので、これは非負である。次に、$u = y^2$、$\mathrm{d}v = -\mathrm{f}'(y)\,\mathrm{d}y$ として部分積分すると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y^2) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2(-\mathrm{f}'(y))\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{b-a}\Big[-y^2\mathrm{f}(y)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{-b^2a + a^2b}{b-a} + \int_a^b \frac{2y\,\mathrm{f}(y)}{b-a}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathrm{f}(b) = a$ と $\mathrm{f}(a) = b$ を用いた。第 1 項は $-ab(b-a)/(b-a) = -ab$ である。積分変数（dummy variable）y を x と書き換えると

$$\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \int_a^b \frac{2x\,\mathrm{f}(x)}{b-a}\,\mathrm{d}x.$$

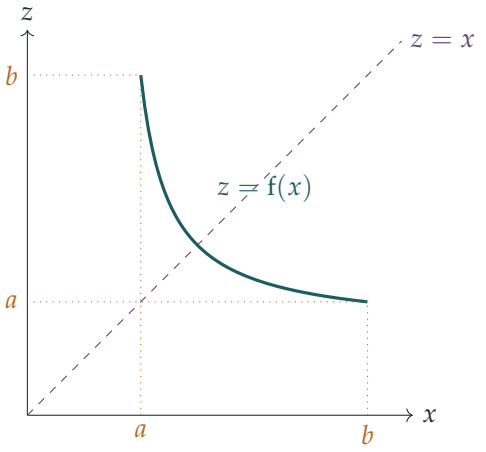
小問 (ii)

$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ より $c = \dfrac{ab}{a+b}$ であり、$\frac{1}{c} > \frac{1}{a}$ なので $c < a$ であることに注意する。Z について解くと

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{c} - \frac{1}{X} = \frac{X-c}{cX}, \qquad \text{よって} \qquad Z = \mathrm{f}(X) \text{ ただし } \mathrm{f}(x) = \frac{cx}{x-c}.$$

$x \ge a > c$ なので、分母は $[a,b]$ 上で正である。f が小問 (i) の 3 つの条件を満たすことを確かめる。

- $\frac{1}{\mathrm{f}(a)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ より $\mathrm{f}(a) = b$ である。同様に $\frac{1}{\mathrm{f}(b)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$ より $\mathrm{f}(b) = a$ である。
- $\frac{1}{\mathrm{f}(x)} = \frac{1}{c} - \frac{1}{x}$ は $[a,b]$ 上で正かつ狭義単調増加なので、$\mathrm{f}(x)$ はそこで狭義単調減少である。
- 関係式 $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ は x と z について対称である。したがって $z = \mathrm{f}(x)$ となるのは $x = \mathrm{f}(z)$ のとき、かつそのときに限る。これは $\mathrm{f} = \mathrm{f}^{-1}$ を意味する。



f のグラフは (a,b) から (b,a) へと延び、自己逆関数のグラフがそうであるべきように、直線 $z=x$ に関して対称である。

? 考えてみよう なぜ $\mathrm{E}(Z^2)$ だけでなく $\mathrm{E}(Z)$ も求めるのか？

不等式は $\mathrm{Var}(Z)>0$ から導かれるはずであり、分散を求めるには両方のモーメント（moment）が必要である。対数はどちらのモーメントにも現れるが、その 1 乗の項は打ち消し合い、2 乗の項だけが残る。

どちらの積分についても、まず割り算をしておく：

$$\mathrm{f}(x)=c+\frac{c^2}{x-c},\qquad x\,\mathrm{f}(x)=\frac{cx^2}{x-c}=c\left(x+c+\frac{c^2}{x-c}\right).$$

$L=\ln\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)$ とおく。$b-c>a-c>0$ なので、これは正である。このとき

$$\mathrm{E}(Z)=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(c+\frac{c^2}{x-c}\right)\mathrm{d}x=c+\frac{c^2L}{b-a}.$$

小問 (i) より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Z^2)&=-ab+\frac{2c}{b-a}\int_a^b\left(x+c+\frac{c^2}{x-c}\right)\mathrm{d}x\\&=-ab+\frac{2c}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}+c(b-a)+c^2L\right)\\&=-ab+c(a+b)+2c^2+\frac{2c^3L}{b-a}.\end{aligned}$$

ここで $c(a+b)=ab$ なので、最初の 2 項は打ち消し合う。$\mathrm{E}(Z)^2=c^2+\dfrac{2c^3L}{b-a}+\dfrac{c^4L^2}{(b-a)^2}$ を引くと、L の 1 次の項が打ち消し合い、

$$\mathrm{Var}(Z)=c^2-\frac{c^4L^2}{(b-a)^2}$$

を得る。Z は定数ではない。実際、小問 (i) より、その分布関数（distribution function）$\big(b-\mathrm{f}(y)\big)/(b-a)$ は $[a,b]$ 上で 0 から 1 まで狭義単調に増加する。よって $\mathrm{Var}(Z)>0$ であり、

$$L^2 < \frac{(b-a)^2}{c^2}$$

が得られる。L と $(b-a)/c$ はともに正なので、両辺の平方根をとってよい：

$$\ln\left(\frac{b-c}{a-c}\right) < \frac{b-a}{c}.$$

検算

- 小問 (i) で、最も簡単な自己逆の例 $\mathrm{f}(x)=a+b-x$ を試してみる。このとき Y は $[a,b]$ 上の一様分布に従い、公式から $\mathrm{E}(Y^2) = -ab + \frac{2}{b-a}\int_a^b x(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$ が得られる。これは一様分布に従う確率変数（random variable）の 2 次モーメントとして正しい値である。
- $a=1$、$b=3$ のとき $c=\frac{3}{4}$、$L=\ln 9\approx 2.197$ であり、一方 $(b-a)/c=\frac{8}{3}\approx 2.667$ である。不等式は成り立ち、$\mathrm{Var}(Z)=\frac{9}{16}-\frac{81}{256}\cdot\frac{(\ln 9)^2}{4}\approx 0.180$ となる。f と f^2 をコンピュータで数値積分しても同じ分散が得られる。
- $b\to a$ のとき、不等式の両辺はともに 0 に近づき、$\mathrm{Var}(Z)\to 0$ となる。Z は $[a,b]$ に押し込められるのだから、そうなるべきである。

よくある間違い

- 減少関数は不等号の向きを逆にすることを忘れ、$\mathrm{P}(Y\le y)=\mathrm{P}(X\le \mathrm{f}(y))$ と書いてしまう。
- 密度 $-\mathrm{f}'(y)/(b-a)$ のマイナス符号を落とす。密度が負になることはありえない。
- $\mathrm{Var}(Z)$ が**狭義に**正である理由を述べない。あるいは、両辺が正であることに触れずに平方根をとる。

STEP のその先へ

小問 (i) は密度の変数変換公式（transformation rule for densities）の特別な場合である：$Y=\mathrm{f}(X)$ で f が単調ならば、$g_Y(y)=g_X\big(\mathrm{f}^{-1}(y)\big)\,\big|(\mathrm{f}^{-1})'(y)\big|$ が成り立つ。$\mathrm{Var}(Z)>0$ から狭義の不等式を得る手法は、強力な技法の一例である：$\mathrm{E}(Z)^2\le \mathrm{E}(Z^2)$ はイェンセン（Jensen）の不等式（あるいはコーシー・シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式）が姿を変えたものであり、うまく確率変数を選べば多くの古典的な不等式が証明

できる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。