解答例

STEP III 2020、第 10 問

力学 ・ 単振動

> **STEP III 2020、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

ばねにつるされた質点は、その平衡位置（equilibrium position）を中心とする単振動（simple harmonic motion）を行い、これによって Ω が k、g、a で表される。台の上では、質点の加速度は台の加速度に等しく、これは x で表されるので、ニュートンの運動の第 2 法則（Newton's second law）から垂直抗力（reaction）がただちに求まる。接触を保つには、垂直抗力がつねに非負でなければならない。垂直抗力は x の**一次式**になることがわかるので、台の運動の両端だけを調べればよい。どちらの端が問題になるかは、ω が Ω より小さいか大きいかによって決まる。

解答

質点を質点（point mass）として、ばねを質量の無視できるものとしてモデル化し、ばねは伸びと縮みのどちらについてもフックの法則（Hooke's law）に従うとする。以下では一貫して、質点にはたらく力について上向きを正とする。

つるされた質点。 質点の A から下方への距離を y とすると、伸び（extension）は $y-a$ であり、張力（tension）は $kmg(y-a)/a$ で、質点に上向きにはたらく。下向きを正としてニュートンの運動の第 2 法則を用いると

$$m\ddot{y} = mg - \frac{kmg}{a}(y-a) \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} = -\frac{kg}{a}\left(y - a - \frac{a}{k}\right).$$

を得る。$z = y - a(1+\frac{1}{k})$ とおくとこれは $\ddot{z} = -\frac{kg}{a}z$ となり、平衡点 $y = a(1+\frac{1}{k})$ を中心とする単振動である。質点はこの点から離れた位置で静かに放される（伸びが a/k 以外であれば $z \neq 0$ となる）ので、角振動数（angular frequency）$\sqrt{kg/a}$、周期

（period）$2\pi\sqrt{a/(kg)}$ で鉛直に振動する。これを $2\pi/\Omega$ に等しいとおくと $\Omega^2 = kg/a$、すなわち

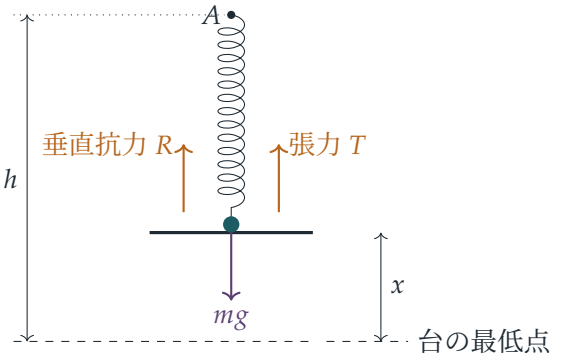
$$kg = a\Omega^2.$$

を得る。以下ではこれを $g/\Omega^2 = a/k$ の形で用いる。

台。 台は振幅（amplitude）b、角振動数 ω の単振動を行うので、最低点からの台の高さ x は $0 \le x \le 2b$ の範囲を動き、振動の中心は $x = b$ である。したがって台の加速度は

$$\ddot{x} = -\omega^2(x-b) = \omega^2(b-x).$$

である。（たとえば $x = b(1-\cos\omega t)$ とすると $\ddot{x} = \omega^2 b\cos\omega t = \omega^2(b-x)$ となる。）



垂直抗力。 質点が台と接触している間は台とともに動くので、台の最低点からの質点の高さは x、加速度は $\ddot{x}$ である。A から下方への質点の距離は $h-x$ なので、ばねの伸びは $h-x-a$ であり、張力は $kg/a = \Omega^2$ を用いて

$$T = \frac{kmg}{a}(h-x-a) = m\Omega^2(h-x-a),$$

となる。（$h-x<a$ ならばばねは縮んでおり（compression）、T は負、すなわち押す力になるが、同じ式がそのまま成り立つ。）質点にはたらく力は上向きの R と T、下向きの mg であるから

$$R + T - mg = m\ddot{x} = m\omega^2(b-x),$$

であり、したがって

$$R = mg - m\Omega^2(h-x-a) + m\omega^2(b-x) = mg + m\Omega^2(a+x-h) + m\omega^2(b-x),$$

となって、題意の式が得られる。

接触を保つ条件。 質点がつねに台の上にとどまるための必要十分条件は、$[0, 2b]$ のすべての x に対して $R \geq 0$ となることである。x を含む項をまとめると

$$\frac{R}{m} = g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + (\Omega^2 - \omega^2)\, x.$$

となる。

考えてみよう なぜ x のただ一つの値だけを調べれば十分なのだろうか。

R は x の一次関数（linear function）なので、区間 $0 \leq x \leq 2b$ における最小値は端点でとる。傾き $\Omega^2 - \omega^2$ が正ならば $x = 0$ で、負ならば $x = 2b$ で最小となる。台は各周期ごとに両端に達するので、つねに $R \geq 0$ であることは、該当する端点で $R \geq 0$ であることと同値である。

$\omega < \Omega$ の場合。最小値は $x = 0$（運動の最下点）でとるので、$\Omega^2 > 0$ で割り、$g/\Omega^2 = a/k$ を用いると、必要な条件は

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b \geq 0 \iff h \leq a + \frac{g}{\Omega^2} + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2} = a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + \frac{\omega^2 b}{\Omega^2},$$

である。これが求める不等式である。

$\omega > \Omega$ の場合。このときは最小値を $x = 2b$（運動の最上点）でとるので、必要な条件は

$$g + \Omega^2(a-h) + \omega^2 b + 2b(\Omega^2 - \omega^2) \geq 0 \iff h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b\left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right).$$

である。

すべての ω に対して成り立つ上界。 質点が接触を保つと仮定する。

- $\omega < \Omega$ ならば、$b > 0$ より $\omega^2 b/\Omega^2 < b$ なので、$h \leq a(1 + \frac{1}{k}) + \omega^2 b/\Omega^2 < a(1 + \frac{1}{k}) + b$ である。
- $\omega > \Omega$ ならば、$2 - \omega^2/\Omega^2 < 1$ なので、$h \leq a(1 + \frac{1}{k}) + b(2 - \omega^2/\Omega^2) < a(1 + \frac{1}{k}) + b$ である。
- $\omega = \Omega$ ならば、R の x を含む項は打ち消し合い、$R/m = g + \Omega^2(a-h) + \Omega^2 b$ は定数となる。$R \geq 0$ からちょうど $h \leq a(1 + \frac{1}{k}) + b$ が得られる。

したがって、ω の値によらず、どの場合にも

$$h \leq a\left(1 + \frac{1}{k}\right) + b$$

が必要である。$h - b$ は台の運動の中心の A からの深さであり、$a(1 + \frac{1}{k})$ はつるされた質点の平衡位置の深さであるから、この結果は「台は、質点の本来の平衡位置より低くない点を中心として振動しなければならない」ということを意味している。

検算

- $a = 1$、$k = 2$、$g = 9.8$ として自由運動を数値的に追うと、得られる周期から $a\Omega^2 \approx 19.600$ となり、$kg = 19.6$ と一致する。
- 台が静止している場合（$b = 0$）、どちらの上界も $h \le a(1 + \frac{1}{k})$ となる。台が平衡点より下にあってはならず、そうでなければばねが質点を持ち上げて台から離してしまう。これはまさに正しい。
- $\omega = \Omega$ では二つの場合の上界は一致し、どちらも $a(1 + \frac{1}{k}) + b$ を与える。連続性（continuity）から考えて当然そうなるべきである。

よくある間違い

- 運動の最上点だけを調べてしまうこと。台がゆっくり動く場合（$\omega < \Omega$）、質点が最も離れやすいのは**最下点**であり、そこではばねが最も強く上に引っ張る。
- ばねが縮みうることを忘れること。張力の式 $kmg(h - x - a)/a$ は符号によらず成り立つので、場合分けを別に行う必要はない。

STEP のその先へ

これは姿を変えた強制振動（forced oscillator）である。ばねは質点をその固有振動数（natural frequency）Ω で振動させようとし、一方で台は振動数 ω を押しつける。垂直抗力は、この二つを両立させるのに必要な力である。大学の振動論の講義では、外力によって駆動される系、共振（resonance）、そして応答が ω/Ω にどのように依存するかを学ぶ。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、これらの考え方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。