解答例

STEP III 2020、第 1 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

STEP III 2020、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は漸化式（reduction formula）を導く問題なので、まず部分積分（integration by parts）を用いるのが自然である。すなわち、$\cos x$ のべきを微分し、$\cos bx$ を積分する。すると積 $\sin x \sin bx$ が残るが、$\cos(b-1)x$ に対する加法定理（compound-angle formula）を使えば、これを元と同じ型の積分に戻すことができる。小問 (ii) では新しい道具は何も要らない。漸化式は a と b をともに 1 ずつ下げるので、差 $b-a=2m+1$ は一定に保たれ、n から $n+1$ へときれいに進むことができる。

解答

小問 (i)

$a, b \geq 1$ とする。$u = \cos^a x$、$\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x$ として部分積分を行う。このとき $\mathrm{d}u = -a\cos^{a-1} x \sin x\,\mathrm{d}x$、$v = \frac{1}{b}\sin bx$ である（$b \neq 0$ なので問題ない）：

$$\mathrm{I}(a,b) = \left[\frac{\cos^a x\,\sin bx}{b}\right]_0^{\pi/2} + \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1} x\,\sin x\,\sin bx\,\mathrm{d}x.$$

境界項は両端で 0 となる。$x = \frac{\pi}{2}$ では $\cos^a \frac{\pi}{2} = 0$ であるから（ここで $a \geq 1$ を用いる）、$x = 0$ では $\sin 0 = 0$ であるからである。

考えてみよう $\sin x \sin bx$ を x の倍数の余弦に戻すにはどうすればよいか？

$\mathrm{I}(a-1, b-1)$ を登場させたいので、$\cos(b-1)x$ に注目する：

$$\cos(b-1)x = \cos bx \cos x + \sin bx \sin x \quad \Longrightarrow \quad \sin x \sin bx = \cos(b-1)x - \cos x \cos bx.$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2} \cos^{a-1}x\,\cos(b-1)x\,\mathrm{d}x - \frac{a}{b}\int_0^{\pi/2}\cos^a x\,\cos bx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1) - \frac{a}{b}\,\mathrm{I}(a,b).\end{aligned}$$

両辺に b を掛けて $\mathrm{I}(a,b)$ の項をまとめると $(a+b)\,\mathrm{I}(a,b) = a\,\mathrm{I}(a-1,b-1)$ を得る。$a+b>0$ であるから、

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{a}{a+b}\,\mathrm{I}(a-1,b-1),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

左辺の積分は $\mathrm{I}(n,\,n+2m+1)$ である。右辺を

$$R(n,m) = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}$$

とおく。任意の非負整数 m を固定し、n に関する数学的帰納法（induction）によって、すべての $n\geq 0$ に対して $\mathrm{I}(n,n+2m+1) = R(n,m)$ が成り立つことを証明する。

基底段階、$n=0$ の場合。

$$\mathrm{I}(0,2m+1) = \int_0^{\pi/2}\cos(2m+1)x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin((2m+1)\frac{\pi}{2})}{2m+1} = \frac{(-1)^m}{2m+1},$$

なぜなら $\sin(m\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos m\pi = (-1)^m$ だからである。一方、

$$R(0,m) = (-1)^m\,\frac{1\cdot 1\cdot(2m)!\,m!}{m!\,(2m+1)!} = \frac{(-1)^m}{2m+1}.$$

よって $n=0$ のとき結果は成り立つ。

帰納段階。ある $k\geq 0$ に対して $\mathrm{I}(k,k+2m+1) = R(k,m)$ が成り立つと仮定する。小問 (i) を $a=k+1$、$b=k+2m+2$（いずれも正の整数）として適用する。このとき $a-1=k$、$b-1=k+2m+1$、$a+b=2k+2m+3$ であるから、

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,\mathrm{I}(k,\,k+2m+1) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m).$$

$k+2m+2 = (k+1)+2m+1$ であるから、左辺は同じ m に対する $n=k+1$ の場合の積分そのものであることに注意する。

? **考えてみよう** 公式によれば、$R(k+1,m)/R(k,m)$ はいくつになるはずか？

R において $n=k$ から $n=k+1$ に移るとき、因子 $(-1)^m(2m)!/m!$ は変わらず、

$$\begin{aligned}\frac{R(k+1,m)}{R(k,m)} &= \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{k!}\cdot\frac{(k+m+1)!}{(k+m)!}\cdot\frac{(2k+2m+1)!}{(2k+2m+3)!}\\ &= \frac{2(k+1)(k+m+1)}{(2k+2m+3)(2k+2m+2)} = \frac{k+1}{2k+2m+3},\end{aligned}$$

となる。ここで $2k+2m+2=2(k+m+1)$ を用いた。したがって

$$\mathrm{I}(k+1,\,k+2m+2) = \frac{k+1}{2k+2m+3}\,R(k,m) = R(k+1,m),$$

であり、これは $n=k+1$ の場合の主張である。

結果は $n=0$ で成り立ち、$n=k$ で成り立つならば $n=k+1$ でも成り立つから、数学的帰納法により、すべての非負整数 n に対して成り立つ。m は任意であったから、すべての非負整数 m に対しても成り立つ：

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\cos(n+2m+1)x\,\mathrm{d}x = (-1)^m\,\frac{2^n\,n!\,(2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}.$$

検算

- $n=1$、$m=0$ とすると、公式は $\frac{2\cdot1\cdot1\cdot1}{1\cdot3!}=\frac{1}{3}$ を与える。直接計算すると、$\cos x\cos 2x=\frac{1}{2}(\cos 3x+\cos x)$ を $[0,\frac{\pi}{2}]$ で積分して $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}$ となる。
- $n=1$、$m=1$ とすると、公式は $-\frac{2\cdot2\cdot2}{5!}=-\frac{1}{15}$ を与え、$\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 5x\,\mathrm{d}x$ の数値計算は -0.066667 を与える。
- (i) の漸化式と (ii) の閉じた形は、$n\le 6$、$m\le 5$ のすべての場合についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 境界項が 0 になる理由を述べ忘れる。上端では $a\ge 1$ が必要である。
- n について帰納法を行いながら m を変化させてしまう。小問 (i) は a と b を同時に下げるので、m は固定されたままである。
- $\sin\left((2m+1)\frac{\pi}{2}\right)$ の符号を誤る。これは $1,-1,1,\ldots$ と交互に変わり、$(-1)^m$ を与える。

STEP のその先へ

このような漸化式は数列の漸化式の積分版であり、その閉じた形は、ウォリス（Wallis）の積やベータ関数（Beta function）$\int_0^{\pi/2} \cos^p x \sin^q x \, \mathrm{d}x$ と同じように階乗の比から組み立てられている。これらは大学の解析学や数理手法の講義の早い段階で出会うものである。同じ趣旨の問題をさらに解きたい場合は、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。