解答例

STEP II 2020、第 9 問

力学 ・ 放物体の衝突

STEP II 2020、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

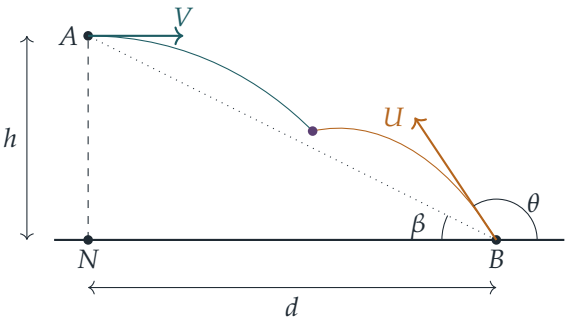
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つの粒子を 1 つの座標系（coordinate system）で表し、時刻 t におけるそれぞれの位置を書き下す。どちらの粒子も同じ下向きの加速度（acceleration）g を受けるので、高さを比べると $-\frac{1}{2}gt^2$ の項は打ち消し合う。つまり互いに対して見れば、2 つの粒子は等速度で直線運動をしている。このため衝突時刻は非常に簡単に求まり、以降の小問はすべてそこから短い議論で導かれる。

解答

2 つの粒子をともに重力のもとで自由に運動する質点（point mass）とみなし、空気抵抗（air resistance）は無視する。N を原点、x 軸を NB に沿ってとり（したがって $B=(d,0)$、$A=(0,h)$）、y 軸を鉛直上向きにとる。A から投げた粒子は B に向かって、B から投げた粒子は N に向かって進むので、両者の水平方向の速度は逆向きである。これが与えられた結果の述べている設定である。



投射から時間 t 後、A から投げた粒子の位置は

$$x_A = Vt, \qquad y_A = h - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

であり、B から投げた粒子の位置は

$$x_B = d - Ut\cos\theta, \qquad y_B = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

である。両方の座標が一致すれば、2 つの粒子は時刻 T に衝突（collision）する。高さが一致するのは

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 = UT\sin\theta - \tfrac{1}{2}gT^2 \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{h}{U\sin\theta},$$

のときであり、これが衝突時刻としてありうる唯一の値である（θ は鋭角なので $\sin\theta > 0$）。この同じ時刻に水平方向の位置も一致しなければならない：

$$VT = d - UT\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad (V + U\cos\theta)\,\frac{h}{U\sin\theta} = d.$$

両辺に $U\sin\theta$ を掛けると $Vh + Uh\cos\theta = Ud\sin\theta$ となり、U で割ると

$$d\sin\theta - h\cos\theta = \frac{Vh}{U},$$

を得る。これが示すべき式である。

小問 (i)

直角三角形 ANB より $\tan\beta = h/d$ であり、$0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$ である。V、h、U は正なので、いま示した結果から $d\sin\theta - h\cos\theta > 0$ が成り立つ。$d\cos\theta > 0$（θ は鋭角）で割ると

$$\tan\theta > \frac{h}{d} = \tan\beta.$$

2 つの角はともに $(0, \frac{1}{2}\pi)$ にあり、この区間で tan は狭義単調増加（strictly increasing）なので、$\theta > \beta$ である。

小問 (ii)

考えてみよう ここまでの計算では、地面のことを一切使っていない。まだ課していない物理的な条件は何だろうか？

衝突はどちらかの粒子が地面に達する前に起こらなければならないので、時刻 T における共通の高さは 0 以上でなければならない：

$$h - \tfrac{1}{2}gT^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad h \geq \frac{gh^2}{2U^2\sin^2\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad U^2\sin^2\theta \geq \frac{gh}{2}.$$

（$h>0$ で割り、$U^2\sin^2\theta>0$ を掛けた。）$U\sin\theta>0$ なので、正の平方根をとると

$$U\sin\theta \geq \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

を得る。等号は、2 つの粒子がちょうど地面に達した瞬間に出会う場合に対応する。

小問 (iii)

$r=AB=\sqrt{d^2+h^2}$ とおくと、$d=r\cos\beta$、$h=r\sin\beta$ である。すると

$$d\sin\theta-h\cos\theta=r(\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)=r\sin(\theta-\beta),$$

となり、衝突の条件は

$$r\sin(\theta-\beta)=\frac{Vr\sin\beta}{U} \quad\Longrightarrow\quad \frac{U}{V}=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

となる。小問 (i) より $\theta-\beta>0$ であり、また $\theta-\beta<\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。よって $0<\sin(\theta-\beta)<1$ であり、$\sin\beta>0$ だから

$$\frac{U}{V}=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}>\sin\beta.$$

最後の小問

衝突が起こる高さは $h-\frac{1}{2}gT^2$ なので

$$\text{次より高い位置で衝突：}\tfrac{1}{2}h \iff h-\tfrac{1}{2}gT^2>\tfrac{1}{2}h \iff gT^2<h.$$

B から投げた粒子の鉛直方向の速度は $U\sin\theta-gt$ なので

$$\text{次の時刻に上昇中：}T \iff U\sin\theta-gT>0 \iff gT<U\sin\theta.$$

考えてみよう $gT<U\sin\theta$ と $gT^2<h$ はどうすれば比べられるだろうか？

衝突時刻そのものを使う。$T=h/(U\sin\theta)$ は $U\sin\theta=h/T$ を意味する。したがって $T>0$ を掛けて

$$gT<U\sin\theta \iff gT<\frac{h}{T} \iff gT^2<h.$$

2 つの条件はどちらも $gT^2<h$ と同値なので、2 つの粒子が高さ $\frac{1}{2}h$ より上で衝突するのは、衝突の瞬間に B から投げた粒子がまだ上昇しているとき、かつそのときに限る。

検算

▶ $g=9.8$、$h=10$、$d=20$、$U=20$、$\theta=\frac{1}{4}\pi$ とする。衝突の条件から $V=U(d\sin\theta-h\cos\theta)/h=10\sqrt{2}\approx14.14$、$T=1/\sqrt{2}\approx0.707\,\mathrm{s}$ となる。このとき 2 つ

の粒子はともに $x = 10$、$y = 10 - 4.9 \times \frac{1}{2} = 7.55$ にあり、$\frac{1}{2}h = 5$ より上である。B から投げた粒子の鉛直方向の速度は $10\sqrt{2} - 9.8/\sqrt{2} \approx 7.21 > 0$ で上昇中であり、最後の小問の結論どおりである。また $U/V = \sqrt{2} > \sin\beta = 1/\sqrt{5}$ も成り立つ。

- 重力がない場合の直観：$g = 0$ なら 2 つの粒子は直線運動をし、条件 $U/V = \sin\beta/\sin(\theta - \beta)$ は A、B と出会う点がつくる三角形における正弦定理（sine rule）にほかならない。重力は 2 つの粒子を同じだけ下にずらすので、条件は変わらない。
- h、d、U、θ を数千通りランダムに選んでコンピュータで確認したところ、衝突、3 つの不等式すべて、そして最後の小問の同値性が確かめられた。

よくある間違い

- 小問 (ii) で地面のことを忘れる。この不等式は衝突の方程式から出てくるのではなく、衝突が高さ 0 以上で起こるという条件から出てくる。
- 2 つの角がともに鋭角であり、そこで tan が増加関数であることに触れずに、$\tan\theta > \tan\beta$ から $\theta > \beta$ を結論してしまう。
- 小問 (iii) で $\sin(\theta - \beta) \leq 1$ で止まってしまう。狭義の不等式を得るには $\theta - \beta < \frac{1}{2}\pi$ が必要である。

STEP のその先へ

$-\frac{1}{2}gt^2$ の項が打ち消し合うのは、自由落下する基準系（freely falling frame of reference）に乗り換えることの一例である。加速度 g で加速する系では重力が消え、2 つの粒子はどちらも直線運動をする。これは大学の力学の最初の講義で扱われるガリレイ（Galileo）変換や加速度系の考え方の最も簡単な場合であり、さらに後にはアインシュタイン（Einstein）の等価原理（equivalence principle）の出発点となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は非慣性系（non-inertial frame）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。