解答例

STEP II 2020、第 8 問

純粋数学 ・ 多項式と積分

> **STEP II 2020、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ であるから、f の根はすべて F の極値点（turning point）であり、各面積の条件は、それらの極値点の一つにおける F の値についての主張に言い換えられる。F が 0 と c で重根（double root）をもつことがわかれば、和 $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x)$ は符号を担うただ一つの因数 $c - 2h$ にまとまる。その符号を、$[0, c]$ における F の最大値と最小値についてわかっていることと比べると、対称性が導かれる。

解答

f は最高次の係数が 1 であるモニック（monic）な多項式で、根が $0, a, b, c$ であるから、$\mathrm{f}(x) = x(x-a)(x-b)(x-c)$ である。したがって、$(0, a)$ で $\mathrm{f} < 0$、(a, b) で $\mathrm{f} > 0$、(b, c) で $\mathrm{f} < 0$ であり、$x < 0$ および $x > c$ で $\mathrm{f} > 0$ である。0 と a の間の面積を A とおく。条件は、b と c の間の面積が A、a と b の間の面積が $2A$ であることを述べており、$A > 0$ である。

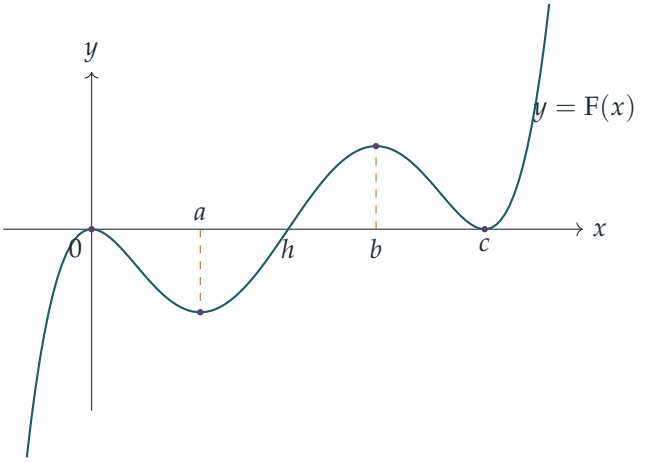
小問 (i)

$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ であるから、$\mathrm{f} < 0$ となる区間での積分は、そこでの面積にマイナスをつけたものになる。よって

$$\mathrm{F}(0) = 0, \qquad \mathrm{F}(a) = -A, \qquad \mathrm{F}(b) = -A + 2A = A, \qquad \mathrm{F}(c) = A - A = 0.$$

$\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ であるから、F の極値点は $x = 0, a, b, c$ にある。f の符号は 0 と b で $+$ から $-$ に変わるので、そこで極大となり、a と c で $-$ から $+$ に変わるので、そこで極小となる。F は最高次の係数（leading coefficient）が正の値 $\frac{1}{5}$ である五次関数（quintic）である

から、$x \to \pm\infty$ のとき $\mathrm{F}(x) \to \pm\infty$ である。



この曲線は $(0,0)$ で極大、$x = a$ で $y = -A$ の極小、$x = b$ で $y = A$ の極大をとり、$(c,0)$ で軸に接する極小をとる。

F の形。 F は次数 5、最高次の係数 $\frac{1}{5}$ の多項式である。$x = 0$ では $\mathrm{F}(0) = 0$ かつ $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{f}(0) = 0$ であるから、$x = 0$ は重複度（multiplicity）が 2 以上の根である。同様に $\mathrm{F}(c) = 0 = \mathrm{F}'(c)$ であるから、c も重複度が 2 以上の根である。これで五つの一次因数のうち四つが決まり、

$$\mathrm{F}(x) = \tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(x-h)$$

とある実数 h を用いて書ける。また、$\mathrm{F}(a) = -A < 0 < A = \mathrm{F}(b)$ であるから、F は a と b の真に間に根をもつ。0 も c も (a,b) に含まれないので、この根は h でなければならない。よって $a < h < b$ であり、特に $0 < h < c$ である。

和について。 $(c-x)^2((c-x)-c)^2 = x^2(x-c)^2$ に注意する。よって

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(c-x) &= \tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2[(x-h)+(c-x-h)] \\ &= \tfrac{1}{5}x^2(x-c)^2(c-2h).\end{aligned}$$

小問 (ii)

$[0,c]$ において、F は $[0,a]$ で狭義単調減少、$[a,b]$ で狭義単調増加、$[b,c]$ で狭義単調減少である。したがって $[0,c]$ における最小値は $\mathrm{F}(a) = -A$ である。他の候補は端点の値 $\mathrm{F}(c) = 0 > -A$ だけだからである。この最小値をとるのは $x = a$ のときに限る。よって $0 \le x \le c$ に対して

$$\mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(x) \;\ge\; \mathrm{F}(b) + \mathrm{F}(a) = A - A = 0,$$

が成り立ち、$x \neq a$ のとき不等号は狭義となる。

考えてみよう x をどの値にとれば、$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(x)$ が小問 (i) の和の形になるだろうか？

$x = c-b$ ととる。$0 < b < c$ であるから、これは $[0,c]$ に属する。小問 (i) より

$$\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b) = \tfrac{1}{5}b^2(b-c)^2(c-2h).$$

$c-b \neq a$ ならば、左辺は正である。$\frac{1}{5}b^2(b-c)^2 > 0$ であるから、$c-2h > 0$ が従う。よって $c-b=a$ または $c > 2h$ であり、これが示すべきことであった。

次に、同じ議論を上下逆にして行う。$[0,c]$ における F の最大値は $\mathrm{F}(b) = A$ であり、これは端点の値 $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$ より大きく、最大値をとるのは $x = b$ のときに限る。よって $0 \leq x \leq c$ に対して

$$\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b) = 0,$$

が成り立ち、$x \neq b$ のとき不等号は狭義となる。$x = c-a \in [0,c]$ ととると $\frac{1}{5}a^2(c-a)^2(c-2h) \leq 0$ が得られ、$c-a \neq b$ ならば不等号は狭義である。よって $c-a=b$ または $c < 2h$ である。

$c \neq a+b$ ならば、二つの結論から $c > 2h$ かつ $c < 2h$ となり、これは不可能である。したがって $c = a+b$ である。このとき $c-b=a$ であるから

$$0 = \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c-b) = \tfrac{1}{5}b^2a^2(c-2h).$$

$a, b \neq 0$ であるから、これより $c = 2h$ が得られる。

小問 (iii)

$h = \frac{1}{2}c$ のとき、$u = x^2(x-c)^2$ とおくと $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{5}u\left(x-\frac{1}{2}c\right)$ であり、$u' = 2x(x-c)(2x-c)$ である。積の微分法（product rule）を用いて微分すると

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \mathrm{F}'(x) &= \tfrac{1}{5}\left[2x(x-c)(2x-c)\left(x-\tfrac{1}{2}c\right)+x^2(x-c)^2\right]\\ &= \tfrac{1}{5}x(x-c)[(2x-c)^2+x(x-c)]\\ &= \tfrac{1}{5}x(x-c)(5x^2-5cx+c^2)\\ &= x(x-c)(x^2-cx+\tfrac{1}{5}c^2).\end{aligned}$$

（したがって $a, b = \frac{1}{2}c \mp \frac{c}{2\sqrt{5}}$ であり、確かにその和は c になる。）

考えてみよう 根は $x = \frac{1}{2}c$ に関して対称である。これを利用して第 2 次導関数を簡単に求められないだろうか？

できる。$y = x - \frac{1}{2}c$ とおく。すると $x(x-c) = y^2 - \frac{1}{4}c^2$、$x^2 - cx + \frac{1}{5}c^2 = y^2 - \frac{1}{20}c^2$ であるから

$$\mathrm{f} = (y^2 - \tfrac{1}{4}c^2)(y^2 - \tfrac{1}{20}c^2) = y^4 - \tfrac{3}{10}c^2y^2 + \tfrac{1}{80}c^4.$$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1$ であるから

$$\mathrm{f}''(x) = 12y^2 - \tfrac{3}{5}c^2,$$

であり、これが 0 になるのはちょうど $y^2 = \frac{1}{20}c^2$ のときである。これらの点では f の因数 $y^2 - \frac{1}{20}c^2$ が 0 になるので、$\mathrm{f} = 0$ である。それぞれは y の二次式 f'' の単根（simple root）であるから、そこで f'' の符号が変わり、これらは本当に変曲点（point of inflection）である。よって二つの変曲点はどちらも x 軸上にある。実際、それらは点 $(a, 0)$ と $(b, 0)$ である。

検算

- $c = 2$ ととると、$a = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.5528$、$b \approx 1.4472$ である。f の数値積分（numerical integration）により、$[0, a]$、$[a, b]$、$[b, c]$ における面積はそれぞれ 0.05724、0.11449、0.05724 となる。外側の二つは等しく、それぞれが真ん中の面積の半分である。
- $a + b = c$、$ab = \frac{1}{5}c^2$ として $x(x-a)(x-b)(x-c)$ を展開すると、小問 (iii) の式が再現される。
- $c = 2$ のとき、$x = a \approx 0.5528$ における f'' の差分（finite difference）による近似値は丸め誤差の範囲で 0 であり、$x = 0.54$ と $x = 0.56$ の間で符号が変わる。

よくある間違い

- $\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(c) = 0$ だけでなく $\mathrm{F}'(0) = \mathrm{F}'(c) = 0$ でもあることを忘れ、重根を見落とす。
- $0 < h < c$ を正当化しない。h の位置を決めるのは、a と b の間での F の符号変化である。
- 小問 (ii) で最初の不等式だけを使う。それから得られるのは「$c = a + b$ または $c > 2h$」であり、それだけでは不十分である。議論を完結させるには、$\mathrm{F}(a)$ を用いた逆向きの不等式が必要である。

STEP のその先へ

小問 (ii) の議論は最大値・最小値の定理（extreme value theorem）を用いている。すなわち、閉区間上の連続関数は最大値と最小値をとるという定理であり、ここではさらにそれらをとる場所も正確にわかっている。面積の条件から導かれる、四次関数（quartic）の $x = \frac{1}{2}c$ に関する対称性は、積分の条件によって多項式の形が決まってしまう一つの例である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、最大値・最小値の定理と、F と f を結びつける微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。