解答例

STEP II 2020、第 7 問

純粋数学 • 複素変換

STEP II 2020、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

写像 $z \mapsto w = \dfrac{2}{z-2}$ は平行移動（shift）のあとに反転（inversion）を施したものであり、反転は原点を通らない直線を原点を通る円に移す。w がある特定の円の上にあることを証明するには、中心 c を予想し、$|w-c|$ が定数に整理されることを示すのがもっとも見通しのよい方法である。$w-c$ を一つの分数にまとめると、分子と分母が互いに共役（またはほぼ共役）になっており、これこそが絶対値（modulus）が一定になる理由である。

解答

以下では、実数 x, y に対して $|\alpha/\beta| = |\alpha|/|\beta|$ および $|x+yi| = |x-yi| = |y+xi| = \sqrt{x^2+y^2}$ が成り立つことを用いる。

小問 (i)

$z = 3+ti$ とすると $z-2 = 1+ti$ であるから、

$$w - 1 = \frac{2}{1+ti} - 1 = \frac{2-(1+ti)}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+ti}.$$

分子と分母は互いに共役複素数（complex conjugate）であるから、絶対値は等しく $\sqrt{1+t^2}$ であり、これは決して 0 にならない。したがって

$$|w-1| = \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = 1,$$

となり、これは t によらない。直線 $\mathrm{Re}(z) = 3$ 上のすべての z は、ある実数 t を用いて $3+ti$ と表せるから、そのようなすべての z について点 w は 1 から距離 1 の位置にあ

る。すなわち、w は中心 1、半径 1 の円の上にある。

直線 V。今度は $z = p + ti$ とし、$a = p - 2$ とおくと見やすい。$p \neq 2$ であるから a は 0 でない実数である。このとき $z - 2 = a + ti$ であり、これは決して 0 にならない。$p = 3$ のときの中心は $1 = 1/a$ であったから、一般に中心として $1/a$ を試してみる。

$$w - \frac{1}{a} = \frac{2}{a+ti} - \frac{1}{a} = \frac{2a - (a+ti)}{a(a+ti)} = \frac{a-ti}{a(a+ti)}.$$

ここでも $|a - ti| = |a + ti|$ であるから、

$$\left| w - \frac{1}{p-2} \right| = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|p-2|}.$$

よって w は次の円の上にある。

$$\text{中心} \frac{1}{p-2}, \qquad \text{半径} \frac{1}{|p-2|}.$$

半径の絶対値記号は重要である。$p < 2$ のとき中心は負の実軸上にあるが、半径は正でなければならない。

> **考えてみよう** $p = 3$ の場合を教えられていなかったとしたら、中心 $1/(p-2)$ はどのようにして見つけられただろうか？

点 $z = p$（$t = 0$ のとき）からは $w = 2/a$ が得られ、$t \to \pm\infty$ のとき $w \to 0$ となる。この二点は直径（diameter）の両端にある（円は実軸に関して対称であり、この二点は円と実軸との二つの交点である）から、中心はその中点 $1/a$ である。

虚部については、分子と分母に共役複素数を掛ける。

$$w = \frac{2(a-ti)}{a^2+t^2}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{Im}(w) = \frac{-2t}{a^2+t^2}.$$

分母は正であるから、$\mathrm{Im}(w) > 0$ となるのはちょうど $t < 0$ のときである。したがって、V の点のうち $\mathrm{Im}(w) > 0$ となるものは

$$z = p + ti \text{ ただし} t < 0, \quad \text{すなわち} V \text{ のうち実軸より下側の点} (\mathrm{Im}(z) < 0).$$

小問 (ii)

今度は s を実数として $z = s + qi$ とし、$u = s - 2$ とおくと $z - 2 = u + qi$ であり、$q \neq 0$ であるからこれは 0 でない。この場合、円の二つの「端」は $w = 0$（$u \to \pm\infty$ のとき）と $w = 2/(qi) = -2i/q$（$u = 0$ のとき）であり、中心は $-i/q$ と予想される。確かめよう。

$$w + \frac{i}{q} = \frac{2}{u+qi} + \frac{i}{q} = \frac{2q + i(u+qi)}{q(u+qi)} = \frac{q+ui}{q(u+qi)}.$$

ここで $|q+ui| = \sqrt{q^2+u^2} = |u+qi|$ であるから、

$$\left|w + \frac{i}{q}\right| = \frac{1}{|q|}.$$

よって w は次の円の上にある。

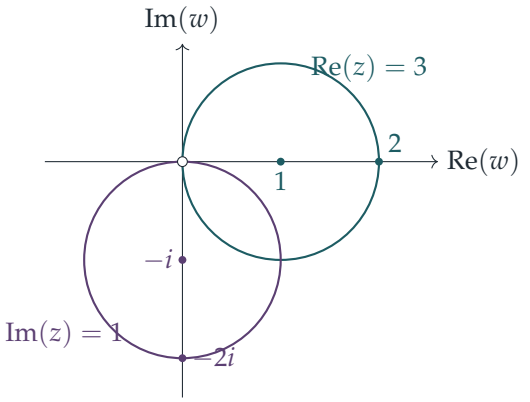
$$\text{中心} -\frac{i}{q}, \qquad \text{半径} \frac{1}{|q|}.$$

実部については、

$$w = \frac{2(u-qi)}{u^2+q^2}, \qquad \text{よって} \qquad \mathrm{Re}(w) = \frac{2u}{u^2+q^2},$$

であり、分母は正である。したがって $\mathrm{Re}(w) > 0$ となるのはちょうど $u > 0$ のとき、すなわち

$z = s + qi$ ただし$s > 2$, すなわちH のうち次の直線より右側にある点：$\mathrm{Re}(z) = 2$.



図は、$\mathrm{Re}(z) = 3$ の像（小問 (i) より）と $\mathrm{Im}(z) = 1$ の像（小問 (ii) で $q = 1$ としたもの）を示している。どちらの円も原点を通るが、$2/(z-2) \neq 0$ であるから $w = 0$ そのものに達することはない。これは直線に沿って「無限遠」にある z に対応している。

検算

- V についての式で $p = 3$ とすると、中心は $1/(3-2) = 1$、半径は 1 となり、最初の結果と一致する。
- 具体的な値で確かめる。$z = 3 - i$ のとき $w = 2/(1-i) = 1+i$ であり、$|w-1| = 1$ かつ $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$ となって、$t = -1 < 0$ と整合する。$q = 1$ の H については、$z = 3+i$ のとき $w = 1-i$ であり、これは $-i$ から距離 1 の位置にあって、$3 > 2$ であるから実部は正である。

- 半径 $1/|p-2|$ は $p \to 2$ のとき大きくなる。このとき直線 V は無限遠に送られる点 $z=2$ の近くを通るから、その像は非常に大きくなるはずである。何千通りものランダムな p, q と各直線上の点についてコンピュータで確認したところ、二つの円と二つの符号の条件がいずれも正しいことが確かめられた。

よくある間違い

- 半径を $1/(p-2)$ や $1/q$ と答えてしまう。これらは $p<2$ や $q<0$ のとき負になる。
- $\mathrm{Im}(w)$ の符号を逆にしてしまう。$z-2$ で割ると実軸に関して折り返されるので、$\mathrm{Im}(w)$ は $\mathrm{Im}(z)$ と逆の符号をもつ。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto 2/(z-2)$ はメビウス（Möbius）変換（Möbius transformation）$z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ の一つである。これらの写像は常に「一般化された円」（generalised circles、すなわち円と直線）を一般化された円に移し、等角写像（conformal mapping）から双曲幾何（hyperbolic geometry）に至るまで、複素解析（complex analysis）の最初の講義における基本的な幾何学的道具となっている。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）にはこれらについての美しい章があり、その図を見ればこのような結果は一目瞭然となる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。