解答例

STEP II 2020、第 6 問

純粋数学 ・ 行列の累乗とトレース

STEP II 2020、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.4 節「もとに戻る行列」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/finite-order.html

鍵となる考え方

実数を成分とする 2×2 行列はすべて、自分自身の特性方程式（characteristic equation）

$$\mathbf{M}^2 - t\,\mathbf{M} + \delta\,\mathbf{I} = \mathbf{0}, \qquad t = \operatorname{tr}(\mathbf{M}),\ \delta = \det(\mathbf{M}),$$

を満たす。これはケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）であり、成分を計算して展開すれば 2 行で確かめられる。$\mathbf{M}^2$ を $\mathbf{M}$ と $\mathbf{I}$ で表してしまえば、$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ のような等式はどれも「$t\mathbf{M}$ が $\mathbf{I}$ の定数倍である」という形になる。したがって $t = 0$ であるか、$\mathbf{M}$ 自身が $\mathbf{I}$ の定数倍であるかのどちらかである。小問 (iii) と (iv) は、小問 (ii) を $\mathbf{M}$ の代わりに $\mathbf{M}^2$ や $\mathbf{M}^4$ に適用すれば得られる。

以下を通して、$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$、$t = a + d$、$\delta = ad - bc$ とおく。

解答

小問 (i)

展開すると

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

となる。たとえば $(a+d)a-(ad-bc)=a^2+bc$、$(a+d)b=ab+bd$ だからである。よって

$$\mathbf{M}^2 = t\mathbf{M} - \delta\mathbf{I}. \qquad (*)$$

$(*)$ のトレース（trace）をとり、$\mathrm{tr}(\mathbf{I})=2$ を用いると

$$\mathrm{tr}(\mathbf{M}^2) = t\cdot t - 2\delta = \mathrm{tr}(\mathbf{M})^2 - 2\det(\mathbf{M}),$$

となり、示すべき式が得られる。（直接計算すれば $a^2+2bc+d^2=(a+d)^2-2(ad-bc)$ である。）

小問 (ii)

1 つ目の同値性、$(\Rightarrow)$。 $\mathbf{M}^2=\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$ と仮定する。$(*)$ に代入すると

$$t\,\mathbf{M} = (1+\delta)\,\mathbf{I}.$$

$t\neq 0$ ならば両辺を割って、実数 $k=(1+\delta)/t$ により $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$ と書ける。すると $\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=\mathbf{I}$ より $k=\pm1$ となり、$\mathbf{M}=\pm\mathbf{I}$ となるが、これは仮定により除かれている。したがって $t=0$ であり、このとき $(1+\delta)\mathbf{I}=\mathbf{0}$ だから $\delta=-1$ である。

$(\Leftarrow)$。 $t=0$ かつ $\delta=-1$ ならば、$(*)$ より $\mathbf{M}^2=0\cdot\mathbf{M}+\mathbf{I}=\mathbf{I}$ である。また $\mathrm{tr}(\pm\mathbf{I})=\pm2\neq 0$ だから $\mathbf{M}\neq\pm\mathbf{I}$ である。

2 つ目の同値性、$(\Rightarrow)$。 $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ ならば、$(*)$ より $t\mathbf{M}=(\delta-1)\mathbf{I}$ である。$t\neq 0$ ならばある実数 k により $\mathbf{M}=k\mathbf{I}$ となり、$\mathbf{M}^2=k^2\mathbf{I}=-\mathbf{I}$ には $k^2=-1$ が必要だが、実数 k ではこれは不可能である。よって $t=0$ であり、このとき $\delta=1$ である。

$(\Leftarrow)$。 $t=0$ かつ $\delta=1$ ならば、$(*)$ からただちに $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ が得られる。

> **考えてみよう** $\mathbf{M}$ が実行列であることを、正確にはどこで使ったか？

2 つ目の同値性においてだけである。$k^2=-1$ は実数解をもたない。複素行列では、$\mathbf{M}=\mathrm{i}\mathbf{I}$ はトレースが $2\mathrm{i}\neq 0$ でありながら $\mathbf{M}^2=-\mathbf{I}$ を満たすので、この結果は成り立たなくなる。

小問 (iii)

$(\Leftarrow)$ は明らかである。$\mathbf{M}^2=\pm\mathbf{I}$ ならば $\mathbf{M}^4=(\pm\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$ となる。

$(\Rightarrow)$。 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^2$ とおく。これは $\mathbf{N}^2=\mathbf{I}$ を満たす実 2×2 行列である。$\mathbf{N}=\pm\mathbf{I}$ ならば求める結論そのものであり、$\mathbf{N}\neq\pm\mathbf{I}$ ならば小問 (ii) より $\det(\mathbf{N})=-1$ となる。しかし

$$\det(\mathbf{N}) = \det(\mathbf{M})^2 \geq 0,$$

であるから、後者の場合は起こりえない。よって $\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I}$ である。

$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ となる条件。再び $\mathbf{N} = \mathbf{M}^2$ とおく。小問 (ii) の 2 つ目の同値性を $\mathbf{N}$ に適用すると

$$\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \mathrm{tr}(\mathbf{N}) = 0 \text{ かつ } \det(\mathbf{N}) = 1.$$

小問 (i) と $\det(\mathbf{N}) = \delta^2$ を用いると、これは

$$t^2 - 2\delta = 0 \quad \text{かつ} \quad \delta^2 = 1.$$

ということである。$\delta^2 = 1$ より $\delta = \pm 1$ であり、$t^2 = 2\delta \geq 0$ より $\delta = -1$ は除かれる。よって $\delta = 1$ かつ $t^2 = 2$ である。どの段階も同値変形であったから

$$\boxed{\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I} \iff \det(\mathbf{M}) = 1 \text{ かつ } \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}}.$$

小問 (iv)

小問 (iii) を $\mathbf{M}^2$ に適用すると $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^4 = \pm\mathbf{I}$ であるから、$\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ を満たす行列はちょうど

$$\mathbf{M}^2 = \pm\mathbf{I} \qquad \text{または} \qquad \det(\mathbf{M}) = 1,\ \mathrm{tr}(\mathbf{M}) = \pm\sqrt{2}.$$

を満たす行列である。回転（rotation）と鏡映（reflection）は**直交**行列（orthogonal matrix）にほかならない。すなわち、その列ベクトルは互いに垂直な単位ベクトル（unit vector）である（回転の行列式（determinant）は 1、鏡映の行列式は -1）。したがって、上の条件を満たし、列ベクトルが単位ベクトルでない行列を 1 つ見つければよい。たとえば

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

はトレースが 0、行列式が -1 であるから、小問 (ii) より $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$ であり（確認：$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$）、したがって $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ である。その第 2 列 $(1, -1)$ の長さは $\sqrt{2} \neq 1$ なので、これは回転でも鏡映でもない。（これは「斜めの鏡映」である。x 軸方向のベクトルをすべて固定し、$(1, -2)$ 方向のベクトルをすべて逆向きにするが、この 2 つの方向は垂直ではない。）

より興味深い族からの例としては $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ がある。行列式は 1、トレースは $\sqrt{2}$ であるから $\mathbf{M}^4 = -\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ であるが、第 1 列の長さは $\sqrt{3}$ である。これは $45°$ の「ゆがんだ」回転であり、その回転と同じく位数（order）はちょうど 8 であるが、長さを保たない。

検算

- 45° の回転 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ は行列式が 1、トレースが $\sqrt{2}$ であり、45° の回転を 4 回行うと半回転、すなわち $-\mathbf{I}$ になる。これは小問 (iii) と整合する。
- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ を 2 乗すると $\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & -1\end{pmatrix}$ となる。これはトレースが 0、行列式が 1 であるから、小問 (ii) よりその 2 乗は $-\mathbf{I}$ である。
- 成分が $\{-3, -\frac{5}{2}, \ldots, 3\}$ に属するすべての行列についてコンピュータで探索し、小問 (ii) の 2 つの同値性と小問 (iii) の 1 つ目の同値性が厳密に成り立つことを確認した。

よくある間違い

- $t = 0$ の場合を先に処理せずに t で割ってしまう。小問 (ii) の議論全体は、t が 0 かどうかによる場合分けである。
- 小問 (iii) で、$\det(\mathbf{M}^2) = \det(\mathbf{M})^2$ が負になりえないことを忘れる。まさにこのことが、$\mathbf{I}$ の「それ以外の」平方根を除外している。
- 小問 (iv) の例として 45° の回転を挙げてしまう。これは $\mathbf{M}^8 = \mathbf{I}$ を満たすが、まさに除外されているものである。

STEP のその先へ

恒等式 $(*)$ は、ケイリー・ハミルトンの定理の 2×2 の場合である。すなわち、すべての正方行列はその特性多項式（characteristic polynomial）を満たす。「どのような $\mathbf{M}$ が $\mathbf{M}^n = \mathbf{I}$ を満たすか？」といった問いは、実は固有値（eigenvalue）に関する問いである。ここでは固有値は 1 の 8 乗根（eighth roots of unity）でなければならず、位数 8 の実行列は回転そのものでなくても回転に**相似**（similar）である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このような考え方で固有値、相似、特性多項式を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。