解答例

STEP II 2020、第 5 問

純粋数学 ・ 数字和と整除性

STEP II 2020、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

10 のどの累乗も 9 で割った余り（remainder）は 1 である。したがって、ある数とその各位の数字の和（digit sum）は、9 を法として（modulo 9）常に一致する。このただ一つの事実によって、各方程式は強い整除性（divisibility）の条件に変わる。あとは大きさの評価で片がつく。各位の数字の和は $9n$ 程度にしか増えないのに対し、数そのものは 10^{n-1} 程度で増えるので、調べるべき候補はわずかしか残らない。

解答

小問 (i)

$x = \sum_{r=0}^{n-1} a_r 10^r$、$\mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r$ とすると、

$$x - \mathrm{d}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} a_r \left(10^r - 1\right).$$

各項において $a_r \geq 0$ かつ $10^r - 1 \geq 0$ であるから、和は非負である。また $10^r - 1 = 99\ldots9$（9 が r 個）$= 9 \times 11\ldots1$ であり、これは 9 で割り切れる（$r = 0$ のときは 0 である）。よってすべての項が、したがって $x - \mathrm{d}(x)$ が 9 で割り切れる。 ■

合同式（congruence）の言葉で書けば、すべての正の整数 x に対して $x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ である。以下ではこれを繰り返し用いる。

小問 (ii)

同値性（equivalence）。 $\mathrm{d}(x) \equiv x \pmod 9$ であるから、

$$x - 44\,\mathrm{d}(x) \equiv x - 44x = -43x \equiv 2x \pmod 9,$$

となる。ここで $-43 = -45 + 2$ を用いた。よって $x - 44\,\mathrm{d}(x)$ が 9 の倍数であることと $9 \mid 2x$ であることは同値である。$\gcd(2,9) = 1$ より、$9 \mid 2x$ であるのは $9 \mid x$ のとき、かつそのときに限る。これで両方向が一度に証明された。 ■

上界と下界。 $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ であり、x が n 桁であるとする。各桁の数字は高々 9 であるから、$\mathrm{d}(x) \le 9n$ であり、$x = 44\,\mathrm{d}(x) \le 396n$ となる。また n 桁の数の最上位の数字は $a_{n-1} \ge 1$ を満たすので、$x \ge 10^{n-1}$ である。合わせると、

$$10^{n-1} \le x \le 396n.$$

$n = 5$ のとき、これは $10\,000 \le 1980$ を要求するが、これは偽である。さらに、ある $n \ge 5$ について $10^{n-1} > 396n$ ならば $10^n = 10 \cdot 10^{n-1} > 3960n \ge 396(n+1)$ となるので、数学的帰納法（induction）により、不等式 $10^{n-1} \le 396n$ はすべての $n \ge 5$ で成り立たない。ゆえに $n \le 4$ である。 ■

> **考えてみよう** 9999 以下のすべての数から、ほんの数個にまで探索範囲を絞り込むにはどうすればよいか。

いま証明した同値性を使う。$x = 44\,\mathrm{d}(x)$ ならば $x - 44\,\mathrm{d}(x) = 0$ であり、これは 9 の倍数であるから、$9 \mid x$ である。すると $9 \mid 44\,\mathrm{d}(x)$ となり、$\gcd(44,9) = 1$ であるから $9 \mid \mathrm{d}(x)$ が従う。したがって $x = 44\,\mathrm{d}(x)$ は $44 \times 9 = 396$ の倍数である。

解を求める。 $n \le 4$ であるから $x \le 396 \times 4 = 1584$ であり、x は 396, 792, 1188, 1584 のいずれかである。これらの各位の数字の和はいずれも 18 なので、どの場合も $44\,\mathrm{d}(x) = 792$ となる。条件を満たすのは次の一つだけである。

$$x = 792, \qquad \mathrm{d}(792) = 18, \quad 44 \times 18 = 792.$$

すべての解は四つの候補のいずれかであり、条件を満たすのは 792 だけであるから、ほかに解はない。 ■

小問 (iii)

$y = \mathrm{d}(x)$、$z = \mathrm{d}(y)$ とおくと、方程式は $x = 107z$ となり、$z = x/107 > 0$ である。

整除性。小問 (i) より $x \equiv y \equiv z \pmod 9$ である。よって

$$0 = x - 107z \equiv z - 107z = -106z \pmod 9.$$

ここで $106 = 99 + 7$ であるから $9 \mid 7z$ であり、$\gcd(7,9) = 1$ より $9 \mid z$ を得る。

大きさ。小問 (i) からは、任意の正の整数 m に対して $\mathrm{d}(m) \leq m$ も得られる。よって x が n 桁ならば $z = \mathrm{d}(y) \leq y \leq 9n$ であり、

$$10^{n-1} \leq x = 107z \leq 963n.$$

$n = 5$ のとき、これは $10\,000 \leq 4815$ を要求するが、これは偽である。小問 (ii) と同じ帰納法（今度は $10^n > 9630n \geq 963(n+1)$）により、すべての $n \geq 5$ で成り立たないことがわかるので、$n \leq 4$ である。

> **考えてみよう** $z \leq 36$ という評価では、9 の倍数がまだいくつも残る。もっと良くできないだろうか。

できる。各位の数字の和をもう一度適用すればよい。$n \leq 4$ のとき $y = \mathrm{d}(x) \leq 36$ である。$1, 2, \ldots, 36$ の中で各位の数字の和が最大となるのは $\mathrm{d}(29) = 11$ である。なぜなら、37 未満の二桁の数の十の位は高々 3 であり、十の位が 3 のとき一の位は高々 6（各位の数字の和は高々 9）であるのに対し、十の位が 2 のときは $2 + 9 = 11$ となりうるからである。よって $1 \leq z \leq 11$ であり、z は 9 の倍数である。ゆえに $z = 9$ であり、

$$x = 107 \times 9 = 963.$$

確認：$\mathrm{d}(963) = 18$、$\mathrm{d}(18) = 9$、$107 \times 9 = 963$。よって $x = 963$ は方程式を満たす。どの解も $z = 9$ でなければならず、したがって $x = 963$ であるから、ほかに解はない。■

検算

- 小問 (i) を具体例で確かめる：$249 - 15 = 234 = 9 \times 26$。
- $x < 10^6$ のすべての x についてコンピュータで探索すると、$x = 44\,\mathrm{d}(x)$ の解は 792 のみ、$x = 107\,\mathrm{d}(\mathrm{d}(x))$ の解は 963 のみであり、上で得た評価と整合する。
- $792 = 44 \times 18$、$963 = 107 \times 9$ であることに注意しよう。整除性の議論が要求するとおり、どちらも 9 の倍数である。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、x が 9 の倍数であることだけを結論してしまう。$\mathrm{d}(x)$ も 9 の倍数であり、したがって $396 \mid x$ となるという、より強い事実こそが探索を短くするのである。
- $n = 5$ だけを確かめて $n \leq 4$ と述べてしまう。それより大きいすべての n について 10^{n-1} が $396n$ を上回り続ける理由が必要である。帰納法（あるいは、左辺は 10 倍

ずつ増えるのに対し右辺は高々 $\frac{6}{5}$ 倍ずつしか増えないという観察）がその理由を与える。

- 小問 (iii) で $z > 0$ を忘れてしまう。$z = 0$ を除外するのはこの条件である。

STEP のその先へ

$x \equiv \mathrm{d}(x) \pmod 9$ という事実は、計算を検算する古くからの方法である「九去法」（casting out nines）の背後にある理論である。これは環（ring）$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ で計算する最初の例であり、そこでは 10 が 1 のように振る舞う。同じ考え方を $10 \equiv -1$ に適用すると、11 で割り切れるかどうかを判定する交代和の方法が得られる。数とその各位の数字の関数とを組み合わせた方程式は、たいていここでと全く同じように解かれる。すなわち、合同式で可能性を絞り込み、増大度の評価で候補を有限個にするのである。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、合同式へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。