解答例

STEP II 2020、第 4 問

純粋数学 • 三角不等式

> **STEP II 2020、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての基礎は三角不等式（triangle inequality）、すなわち各辺は他の 2 辺の和より真に短いという事実にある。実は確かめる必要がある不等式は 1 つだけで、それは**最も長い**辺に関するものである。残りの 2 つは自動的に成り立つからである。逆（converse）については、コンパスで三角形を作図すればよい。1 辺を描き、その両端から 2 つの円を描くのである。

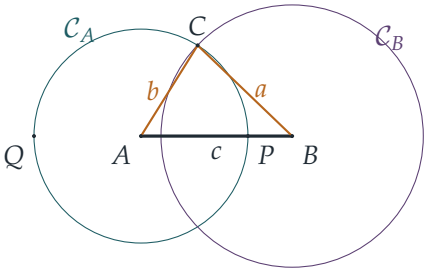
解答

小問 (i)

頂点を A, B, C とし、$BC = a, CA = b, AB = c$ とする。線分 AB は A から B への最短経路であるから、長さ $b + a$ の経路 $A \to C \to B$ は c 以上である。これが c に等しくなることはない。等しくなるのは C が線分 AB 上にあるときに限られ、そのときは三角形にならないからである。よって $c < a + b$ である。残りの 2 組の頂点に対して同じ議論を行えば、$a < b + c$ と $b < a + c$ が得られる。

小問 (ii)

長さ c の線分 AB を描く。A を中心とする半径 b の円 $\mathcal{C}_A$ と、B を中心とする半径 a の円 $\mathcal{C}_B$ を描く。2 円が直線 AB 上にない点 C で交われば、ABC は $CA = b, CB = a, AB = c$ の三角形である。



なぜ 2 円は必ず交わるのだろうか。$\mathcal{C}_A$ と直線 AB の交点を P と Q とし、P は A から見て B と同じ側にあるものとする。すると

$$PB = |c - b|, \qquad QB = c + b.$$

ここで、$c - b < a$ と $b - c < a$ は与えられた不等式のうちの 2 つであるから $|c - b| < a$ であり、$c + b > a$ は 3 つ目の不等式である。したがって、点が $\mathcal{C}_A$ の上半分を P から Q まで動くとき、その点と B の距離は a 未満の値から a より大きい値まで連続的に（continuously）変化するので、どこかで a に等しくなる。その点は両方の円の上にあり、しかも直線 AB 上にはない。$\mathcal{C}_A$ のうちこの直線上にある点は P と Q だけであり、それらと B の距離は a ではないからである。これが求める点 C であり、したがって 3 辺が a, b, c の三角形が存在する。

小問 (iii)

小問 (i) と (ii) を合わせると、3 つの正の数が三角形の 3 辺となるのは、各数が他の 2 数の和より小さいときであり、かつそのときに限る、ということになる。3 数のうち最大のものを ℓ とおく。ℓ が他の 2 数の和より小さければ、残りの 2 つの不等式は直ちに従う。小さい方の数はどちらも ℓ 以下であり、残りの数は正だからである。したがって、調べる必要があるのは常に最大の長さだけである。

(A) 常に成り立つ。 3 つの長さはすべて正である。$c < a + b$ を用いると

$$c + 1 < a + b + 1 < (a + 1) + (b + 1),$$

であり、残りの 2 つの不等式も同様に従う。

(B) 成り立つこともあるが、常にではない。 正三角形（equilateral triangle）の場合、3 つの長さは $1, 1, 1$ となり、これは三角形をなす。しかし $a = b = 1, c = \frac{1}{10}$ とすると、$1 < 1 + \frac{1}{10}$ なのでこれは正真正銘の三角形である。このとき長さは $1, 10, \frac{1}{10}$ となり、$10 > 1 + \frac{1}{10}$ なので三角形はできない。

(C) 決して成り立たない。 3 つの長さは a, b, c について対称（symmetric）であるから、$a \geq b \geq c$ となるように名前を付けてよい。すると

$$|c-a| = a-c = (a-b)+(b-c) = |a-b|+|b-c|.$$

最大の長さが他の 2 つの和に等しいので、厳密な不等式は成り立たない。（a, b, c のうち 2 つが等しければ、長さの 1 つが 0 となり、やはり成り立たない。）

(D) 常に成り立つ。 集合 $\{a^2+bc,\ b^2+ca,\ c^2+ab\}$ は、a, b, c のどの 2 つを入れ替えても変わらない。（たとえば a と b を入れ替えると b^2+ac, a^2+cb, c^2+ba となる。）したがって、3 つの不等式のうち 1 つ、たとえば $a^2+bc < (b^2+ca)+(c^2+ab)$ を、すべての三角形について示せば十分である。差は

$$\begin{aligned}(b^2+ca)+(c^2+ab)-(a^2+bc) &= (b^2-bc+c^2)+a(b+c)-a^2 \\ &= (b-\tfrac{1}{2}c)^2+\tfrac{3}{4}c^2+a(b+c-a).\end{aligned}$$

である。最初の括弧は $c>0$ より正であり、$a>0$ かつ $a<b+c$ より $a(b+c-a)>0$ である。よって差は正である。残りの 2 つの不等式は文字を付け替えれば従い、3 つの長さが正であることも明らかなので、これらは常に三角形をなす。

小問 (iv)

a, b, c の役割は入れ替え可能なので、$a \geq b \geq c$ となるように名前を付けてよい。$f(a), f(b), f(c)$ はすべて正である。f は増加関数（increasing function）であるから $f(a) \geq f(b) \geq f(c)$ であり、小問 (iii) の冒頭の注意により、示すべきは

$$f(a) < f(b)+f(c).$$

だけである。

> ? **考えてみよう** $f(x)/x$ に関する条件は、$f(a)$ と $f(b)+f(c)$ を比較するのにどう役立つだろうか。

この条件により、$f(b)$ と $f(c)$ を $f(a)$ の定数倍で下から評価できる。$f(x)/x$ は x が増加すると減少し、$a \geq b$ であるから

$$\frac{f(b)}{b} \geq \frac{f(a)}{a}, \qquad \text{よって} \qquad f(b) \geq \frac{b}{a}f(a),$$

であり、等号が成り立ちうるのは $b=a$ のときに限る。同様に $f(c) \geq \frac{c}{a}f(a)$ である。辺々加えると

$$f(b)+f(c) \ \geq\ \frac{b+c}{a}f(a) \ >\ f(a),$$

となる。ここで最後の段階では $b+c>a$（三角形であることから）と $f(a)>0$ を用いた。したがって、3 つの新しい長さのうち最大のものは他の 2 つの和より小さく、$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ は三角形の 3 辺となる。

検算

- (D) について、$a=2, b=3, c=4$ とすると、長さは 16, 17, 22 となり、$22<16+17$ である。最長の長さ c^2+ab に合わせて文字を付け替えた恒等式は、差が $(a^2-ab+b^2)+c(a+b-c)=(4-6+9)+4\cdot 1=11$ になると予測し、実際 $16+17-22=11$ である。
- (C) について、三角形 3,4,5 からは 1,1,2 が得られる。予測どおり、つぶれた三角形である。
- ランダムに選んだ 200 000 個の三角形についてコンピュータで確認したところ、(A), (D), (C) が（それぞれ常に、常に、決して）確かめられ、(B) は約 40% の三角形で成り立った。また小問 (iv) も $f(x)=\sqrt{x}$, $\ln(1+x)$, $x/(1+x)$, $x^{0.3}$ と $1-\mathrm{e}^{-x}$ について確かめられた。

よくある間違い

- (B) に対して、三角形を 1 つ試しただけで「決して成り立たない」や「常に成り立つ」と答えること。「成り立つこともある」という答えには、それぞれの場合の例が 1 つずつ必要である。
- (D) で、不等式を 1 つだけ確かめ、残りの 2 つが従う理由を説明しないこと。それを正当化するのが対称性（あるいは最長辺についての注意）である。
- (iv) で、a が b に等しい可能性があるのに $f(a)/a<f(b)/b$ と書くこと。その場合の不等式は $\leq$ であり、厳密性は $b+c>a$ から得なければならない。

STEP のその先へ

三角不等式は**距離関数**（metric）の 3 つの公理（axiom）の 1 つである。距離関数とは、大学 1 年で学ぶ解析学（analysis）と位相空間論（topology）の中心にある、距離の抽象的な概念である。小問 (iv) はこの分野の古典的な事実である。d が距離関数で、f が $f(0)=0$ を満たす増加関数であり、$f(x)/x$ が減少するならば、$f\circ d$ もまた距離関数となる。$d/(1+d)$ が有界な距離関数を作る標準的な方法であるのはこのためである。これらの考え方に出会うには、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解

析入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。