解答例

STEP II 2020、第 3 問

純粋数学 • 対数凹数列

> **STEP II 2020、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

性質 L は、各比 u_{r+1}/u_r がその直前の比以下であることを述べている。したがって、数列がいったん増加をやめると、再び増加に転じることは決してない。これはまさに単峰性（unimodality）そのものである。小問 (ii) では、漸化式（recurrence）の特性方程式（auxiliary equation）が重根（repeated root）α をもち、組み合わせ $u_r - \alpha u_{r-1}$ によって漸化式は単純な等比数列（geometric sequence）に帰着される。残りはすべて、このただ一つの置き換えから導かれる。

解答

小問 (i)

数列が性質 L をもち、$2 \le r \le n-1$ に対して $u_{r-1} \ge u_r$ であるとする。$u_{r-1} > 0$ であるから、性質 L の両辺をこれで割ることができる：

$$u_{r+1} \le \frac{u_r^2}{u_{r-1}} = u_r \cdot \frac{u_r}{u_{r-1}} \le u_r,$$

ここで最後の段階では $u_r/u_{r-1} \le 1$ と $u_r > 0$ を用いた。よって $u_{r-1} \ge u_r \implies u_r \ge u_{r+1}$ である。

次に、性質 L をもつ任意の数列を考える。$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n$ ならば、この数列は $k = n$ として単峰である。そうでなければ、$u_k > u_{k+1}$ となる最初の添字 k が存在する（したがって $k \le n-1$）。k の選び方から

$$u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_k.$$

$u_k \ge u_{k+1}$ であるから、いま証明した含意（$r = k+1$ とする）により $u_{k+1} \ge u_{k+2}$ が

得られる。さらに $r = k+2$ として再び適用すると $u_{k+2} \geq u_{k+3}$ が得られ、以下同様に帰納法（induction）によって $u_{n-1} \geq u_n$ まで成り立つ。ゆえに $u_k \geq u_{k+1} \geq \cdots \geq u_n$ であり、この数列は単峰である。

小問 (ii)

$2 \leq r \leq n$ に対して $v_r = u_r - \alpha u_{r-1}$ とおく。$3 \leq r \leq n$ のとき、漸化式から

$$v_r = 2\alpha u_{r-1} - \alpha^2 u_{r-2} - \alpha u_{r-1} = \alpha\left(u_{r-1} - \alpha u_{r-2}\right) = \alpha v_{r-1}.$$

よって (v_r) は公比 α の等比数列であり、$v_r = \alpha^{r-2} v_2$、すなわち

$$u_r - \alpha u_{r-1} = \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) \qquad (2 \leq r \leq n).$$

（$r = 2$ のときは自明に成り立ち、r を一つ増やすごとに両辺が α 倍される。）

$2 \leq r \leq n-1$ のときは $3 \leq r+1 \leq n$ であるから、$u_{r+1} = 2\alpha u_r - \alpha^2 u_{r-1}$ を代入してよい：

$$u_r^2 - u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - 2\alpha u_r u_{r-1} + \alpha^2 u_{r-1}^2 = (u_r - \alpha u_{r-1})^2.$$

正であることと単峰性。 $u_2 > \alpha u_1 > 0$ と仮定する。$\alpha > 0$ であるから $u_1 > 0$ が得られ、$u_2 > 0$ も成り立つ。それ以降の項については、一つ目の恒等式から

$$u_r = \alpha u_{r-1} + \alpha^{r-2}(u_2 - \alpha u_1) > \alpha u_{r-1},$$

が成り立つ。$\alpha^{r-2} > 0$ かつ $u_2 - \alpha u_1 > 0$ だからである。よって $u_{r-1} > 0$ ならば $u_r > 0$ であり、帰納法によりすべての項が正である。さらに二つ目の恒等式から、$2 \leq r \leq n-1$ に対して $u_{r-1}u_{r+1} = u_r^2 - (u_r - \alpha u_{r-1})^2 \leq u_r^2$ が得られる。これは正の項からなる数列に対する性質 L にほかならないので、小問 (i) によりこの数列は単峰である。

$u_1 = 1, u_2 = 2$ の場合。 $w_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$ とおく。このとき $w_1 = 1 = u_1$ かつ $w_2 = 2 = u_2$ である。この初期値のもとで、一つ目の恒等式は

$$u_r = \alpha u_{r-1} + (2-\alpha)\alpha^{r-2}.$$

となる。$3 \leq r \leq n$ を満たすある r に対して $u_{r-1} = w_{r-1}$ が成り立つと仮定する。すると

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\left[(3-r)\alpha^{r-2} + 2(r-2)\alpha^{r-3}\right] + 2\alpha^{r-2} - \alpha^{r-1} \\ &= (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2} = w_r, \end{aligned}$$

となるので、帰納法により $1 \le r \le n$ に対して $u_r = (2-r)\alpha^{r-1} + 2(r-1)\alpha^{r-2}$ である。(もとの漸化式を用いて二段階の帰納法を行ってもよいが、一階の形を使うほうが速い。)

$\alpha = 1 - \frac{1}{N}$ のときの最大値。 このとき $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ であるから $u_2 = 2 > \alpha = \alpha u_1 > 0$ であり、上で示したことからこの数列は正かつ単峰である。頂点を見つけるために、隣り合う項の差を調べる。$u_{r+1} = \alpha u_r + (2-\alpha)\alpha^{r-1}$ と $\alpha - 1 = -\frac{1}{N}$ から

$$u_{r+1} - u_r = (2-\alpha)\alpha^{r-1} - \frac{u_r}{N} = \frac{\alpha^{r-2}}{N}\Big[N\alpha(2-\alpha) - (2-r)\alpha - 2(r-1)\Big].$$

ここで $N\alpha = N-1$ かつ $2-\alpha = \frac{N+1}{N}$ であるから $N\alpha(2-\alpha) = N - \frac{1}{N}$ であり、また $(2-r)\alpha = 2 - r - \frac{2-r}{N}$ である。括弧の中は

$$N - \frac{1}{N} - 2 + r + \frac{2-r}{N} - 2r + 2 = (N-r) - \frac{r-1}{N} = \frac{N^2 + 1 - r(N+1)}{N},$$

と簡単になるので

$$u_{r+1} - u_r = \frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\Big(N^2 + 1 - r(N+1)\Big).$$

> **考えてみよう** $N^2 + 1 - r(N+1)$ の符号はちょうどどこで変わるか。また、それが零になることはありうるか。

これが零になるのは $r = \dfrac{N^2+1}{N+1} = N - 1 + \dfrac{2}{N+1}$ のときに限られる。$N \ge 2$ であるから $0 < \frac{2}{N+1} < 1$ であり、この値は整数 $N-1$ と N の間に(両端を含まずに)ある。$\alpha^{r-2} > 0$ であるから:

- $r \le N-1$ のとき $u_{r+1} > u_r$;
- $r \ge N$ のとき $u_{r+1} < u_r$。

ゆえに $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ かつ $u_N > u_{N+1} > \cdots > u_n$ である。$N \le n$ であるから項 u_N は存在し、u_r は $r = N$ のときに最大となる(しかも狭義に最大であり、同じ値をとる項はない)。

検算

$N = 5$、すなわち $\alpha = \frac{4}{5}$ とする。漸化式から 1, 2, 2.56, 2.816, 2.8672, 2.78528, 2.62144, ... が得られ、主張どおり $r = 5$ で頂点に達し、その後は減少する。差の公式は $u_6 - u_5 = \alpha^3(26-30)/25 = -0.08192$ を予測し、これは一致する。また $u_3 = 2\alpha \cdot 2 - \alpha^2 = 2.56$ は閉じた式 $-\alpha^2 + 4\alpha$ と一致する。恒等式と頂点の位置は、多くの α, u_1, u_2 の値と 29 までの N について、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

よくある間違い

- 小問 (i) で、u_{r-1} が正であることに触れずにこれで割ってしまう。負の項をもつ数列に対しては、この議論は成り立たない。
- 小問 (ii) で、小問 (i) を用いる前に項が正であることを示し忘れる。小問 (i) には正であることが必要である。
- $u_{N+1} < u_N$ と $u_{N-1} < u_N$ だけを示す。単峰性があればこれで十分だが、その場合はそのことを明言する必要がある。すべての差の符号を求めるほうがすっきりしている。

STEP のその先へ

性質 L は**対数凹性**（log-concavity）とよばれる：$\ln u_r$ が r の凹関数（concave function）であるということである。対数凹な数列は組合せ論（combinatorics）や確率論のいたるところに現れる。二項係数（binomial coefficients）$\binom{n}{r}$ はその一例であり、ニュートン（Newton）の不等式は、実根のみをもつ多項式の係数が対数凹であることを主張する。小問 (ii) の漸化式は重根をもつ線形漸化式（linear recurrence）であり、それゆえ解は $(A + Br)\alpha^r$ の形になる。これは、微分方程式（differential equation）において重根の場合に $(A + Bx)\mathrm{e}^{\alpha x}$ が現れるのとちょうど同じである。この対応の微分方程式の側については Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を、この趣旨の問題については Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。