解答例

STEP II 2020、第 2 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

> **STEP II 2020、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）は変数分離形（separable）であり、積分したあとに注目すべき自然な量は積 xy である。これは 2 の累乗になることがわかる。次に恒等式（identity）$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ を用いると、すべてを和 $s=x+y$ と差 $d=x-y$ で書き直せる。この変数では各曲線が「d^2 が s の関数に等しい」という形になり、その関数がどこで非負になるかを調べることで概形が得られる。

解答

小問 (i)

右辺を因数分解する：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1-ky}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{kx-1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

積分すると $\ln|y|-ky=kx-\ln|x|+c$、すなわち

$$\ln|xy|=k(x+y)+c.$$

どちらの曲線上でも x と y は同符号であるから、$|xy|=xy$ である。$k=\ln 2$ なので、両辺の指数をとると、正の定数 A を用いて $xy=A\,2^{x+y}$ を得る。

曲線 C_1。点 $(1,1)$ では $1=4A$ となるので、$A=\frac{1}{4}$ であり $4xy=2^{x+y}$ である。ここで $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$ であるから

$$(x-y)^2=(x+y)^2-2^{x+y},$$

ただし $x,y>0$ である。これが求める結果である。

曲線 C_2。点 $(-1,-1)$ では $1 = A\cdot 2^{-2}$ となるので、$A = 4$ であり $4xy = 16\cdot 2^{x+y} = 2^{x+y+4}$ である。よって

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 2^{x+y+4},$$

ただし $x, y < 0$ である。

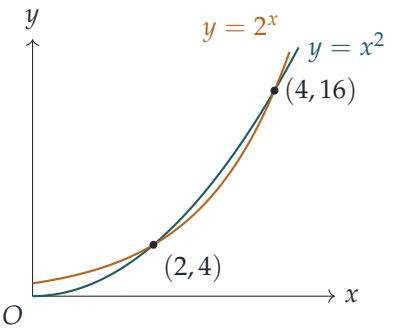
対称性。 x と y を入れ替えても $x+y$ は変わらず、$(x-y)^2 = (y-x)^2$ も変わらないので、それぞれの方程式は変わらない。符号の条件（$x, y > 0$ または $x, y < 0$）も変わらない。したがって (a,b) が曲線上にあれば、その $y = x$ に関する対称点 (b,a) も曲線上にある。よって $y = x$ は各曲線の対称軸（line of symmetry）である。

小問 (ii)

$x \geq 0$ において、曲線 $y = x^2$ と $y = 2^x$ は $(2,4)$ と $(4,16)$ で交わる。交点はこれらだけである。これを確かめるには対数を比較すればよい。$x > 0$ に対して $g(x) = 2\ln x - x\ln 2$ とおくと、$g'(x) = \frac{2}{x} - \ln 2$ であるから、g は $x = 2/\ln 2$ まで増加し、その後は減少する。したがって g の零点は高々 2 個であり、$g(2) = g(4) = 0$ である。よって

$$x^2 \geq 2^x \iff 2 \leq x \leq 4 \qquad (x > 0),$$

であり、$[0,2)$ と $(4,\infty)$ では 2^x が x^2 より上にある。



次に C_1 上の点をとり、$s = x + y > 0$ とおく。C_1 の方程式の左辺は平方であるから

$$s^2 - 2^s = (x-y)^2 \geq 0, \qquad \text{すなわち} \qquad s^2 \geq 2^s.$$

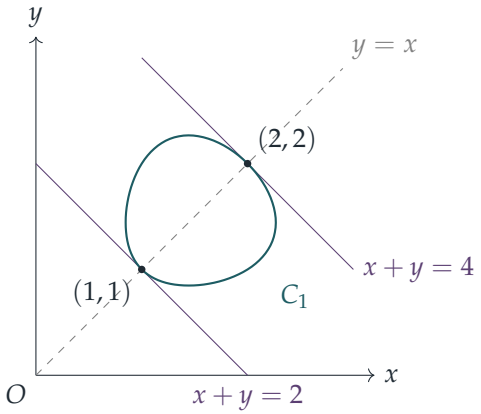
上の図より、これから $2 \leq s \leq 4$ が従う。したがって C_1 は直線 $x + y = 2$ と $x + y = 4$ の間にある。

考えてみよう $[2,4]$ のすべての s の値が実際にとられるだろうか。また、両端で曲線はどのような形をしているだろうか。

各 $s \in [2,4]$ に対して、$d = \pm\sqrt{s^2 - 2^s}$、$x = \frac{1}{2}(s+d)$、$y = \frac{1}{2}(s-d)$ とおく。$2^s > 0$ であるから $|d| < s$ となり、x と y はともに正である。したがって、このような s はどれも C_1 上の点を与え、$2 < s < 4$ のときは 2 点を与える。よってこの曲線は閉じたループである：

- $s = 2$ と $s = 4$ では $d = 0$ となり、$y = x$ 上の点 $(1,1)$ と $(2,2)$ が得られる。どちらの点も $kxy - y = -(x - kxy)$ を満たすので、そこでの傾き（gradient）は -1 である。ループはこれらの点で直線 $x + y = 2$ および $x + y = 4$ に接する。
- 傾きは $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$ のところで 0 になり、$y = 1/\ln 2$ のところで無限大になる。$x = 1/\ln 2$ において、ループ上の点は $y \approx 0.85$（最低点）と $y \approx 2.27$（最高点）である。
- $y = x$ を横切る方向の幅が最大になるのは $s^2 - 2^s$ が最大になるところ、すなわち $s \approx 3.21$ であり、そこで $|d| \approx 1.02$ である。

このループは $y = x$ に関して対称な楕円状の曲線で、2 本の直線の間に挟まれている：



小問 (iii)

今度は $s = x + y < 0$ である。$t = -s > 0$ とおく。前と同様に、次が必要である：

$$s^2 \geq 2^{s+4} \iff t^2 \geq 2^{4-t} \iff t^2 2^t \geq 16.$$

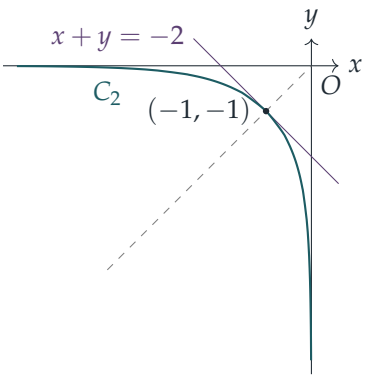
関数 $t^2 2^t$ は $t > 0$ で増加し、$t = 2$ で 16 に等しい。したがって条件は $t \geq 2$、すなわち $x + y \leq -2$ である。（同じことだが、$x < 0$ における $y = x^2$ と $y = 2^{x+4}$ のグラフを描くと、放物線が上にあるのは $x \leq -2$ のときに限る。）$s \leq -2$ を満たす各 s に対して、(ii) と同じ構成により $x, y < 0$ を満たす 2 点が得られる。ただし $s = -2$ のときは 1 点 $(-1,-1)$ のみである。よって今回は C_2 は有界でない：

- C_2 が $y = x$ と交わるのは $(-1, -1)$ のみであり、そこでの傾きもまた -1 であるから、そこで直線 $x + y = -2$ に接する。
- $x, y < 0$ のとき $kx - 1 < 0$ かつ $1 - ky > 0$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(kx-1)}{x(1-ky)} < 0,$$

  となる。分子が正で分母が負だからである。したがって x が増加するにつれて y は一貫して減少する。
- $xy = 4 \cdot 2^{x+y}$ より、$x \to -\infty$ のとき積 xy は 0 に収束するので、$y \to 0^-$ である（実際 $y \approx 4 \cdot 2^x / x$）。対称性により、$x \to 0^-$ のとき $y \to -\infty$ である。負の座標軸が漸近線（asymptote）である。

したがって C_2 は第 3 象限（third quadrant）にある直角双曲線（rectangular hyperbola）の一方の枝に似ているが、それよりはるかに座標軸に密着している：



検算

- $4xy = 2^{x+y}$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると、$4y + 4xy' = k\,2^{x+y}(1 + y') = 4kxy(1 + y')$ となる。整理すると $y' = \dfrac{kxy - y}{x - kxy}$ となり、元の方程式が得られる。C_2 についても同様である。
- $(2, 2)$ は C_1 上にある：$4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 = 2^4$。$C_2$ 上で $x + y = -4$ となる点はおよそ $(-3.936, -0.064)$ であり、$xy \approx 0.252$ である一方 $4 \cdot 2^{-4} = 0.25$ である。上で述べた楕円状の曲線の極値点は、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- $1/x$ と $1/y$ を積分するときに絶対値（modulus）記号を忘れること。C_2 ではこれが重要であり、定数は $\frac{1}{4}$ ではなく $A = 4$ となる。
- $(x+y)^2 \geq 2^{x+y}$ を示しただけで終わってしまうこと。これによって $x+y$ が $[2,4]$ に制限される理由も説明しなければならず、そこで x^2 と 2^x のグラフの比較が役に立つ。
- C_2 を座標軸と交わるように描くこと。C_2 上では両方の座標が負のままであり、座標軸は漸近線である。

STEP のその先へ

座標を $s = x+y$、$d = x-y$ へと回転させると、対称な方程式は「$d^2 = f(s)$」の形になる。このとき曲線が存在するのはちょうど $f(s) \geq 0$ となるところであり、その集合が有界な区間ならば曲線は閉じたループとなり、半直線ならば有界でない曲線となる。同じ考え方で、保存量（conserved quantity）から相図（phase portrait）を描くことができる。$\ln(xy) - k(x+y)$ はどの解に沿っても一定であり、これはロトカ–ヴォルテラ（Lotka–Volterra）の捕食者–被食者（predator–prey）方程式におけるエネルギーと同じである。その方程式の軌道が閉じたループになるのも同じ理由による。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）は、この両方の考え方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。