解答例

STEP II 2020、第 11 問

確率・統計 ・ 硬貨投げにおける連

> **STEP II 2020、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

このゲームはほとんど記憶をもたない。各時点で意味をもつのは、直前に出た面がどちらか、そして現在の連（run）の長さだけである。特に、出る面が変わった瞬間、ゲームはその新しい面がまさに 1 回目の投げで出た場合とまったく同じ状況になる。そこで 1 回目の投げで条件付け（conditioning）を行い、1 回目が表のときに A が勝つ確率（probability）を、1 回目が裏のときに A が勝つ確率を用いて表し、逆も同様に表す。こうして 2 つの連立一次方程式（simultaneous linear equations）が得られる。

解答

以下では常に $0 < p < 1$ とする。（$p = 0$ または $p = 1$ の場合はすべての投げで同じ面が出るので、ゲームは 2 回目か 3 回目の投げで終わり、答えは自明である。）

$$\alpha = \mathrm{P}(\text{A が勝つ} \mid 1 \text{ 回目が H}), \qquad \beta = \mathrm{P}(\text{A が勝つ} \mid 1 \text{ 回目が T}).$$

とおく。各回の投げは独立（independent）であるから、ある投げの後に起こることは、それ以降の投げだけによって決まる。

小問 (i)

ゲームは終わる。 n 回投げた後もゲームが続いているのは、それまでに連続する 2 回の投げで同じ面が出たことが一度もない場合、すなわち最初の n 回が $HTHT\ldots$ または $THTH\ldots$ と交互に出ている場合に限る。$n = 2m$ のとき、この 2 つの列はいずれも表を m 回、裏を m 回含むので、

$$\mathrm{P}(2m \text{ 回投げた後も終わっていない}) = 2p^m q^m = 2(pq)^m \leq 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^m,$$

となる。ここで $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ を用いた。事象「ゲームが決して終わらない」はこれらの事象のどれにも含まれるから、その確率はすべての m について $2\left(\frac{1}{4}\right)^m$ 以下であり、$m \to \infty$ とすればそれが 0 であることがわかる。

1 回目が表の場合。2 回目の投げに注目する。

- 確率 p で表が出て、A がただちに勝つ。
- 確率 q で裏が出る。このとき、その前の表はもはや関係がない。B はあと 1 回裏が出ればよく、A は表が 2 回続けて出る必要がある。これはまさにこの裏が 1 回目の投げであった場合と同じである。したがって、このとき A が勝つ確率は β である。

同様に、1 回目が裏の場合、2 回目が裏なら B がただちに勝ち、2 回目が表なら「1 回目が表」の状況になる。よって

$$\alpha = p + q\beta, \qquad \beta = p\alpha.$$

第 2 式を第 1 式に代入すると $\alpha = p + pq\,\alpha$ となるので、

$$\alpha = \frac{p}{1-pq},$$

が示された（$1 - pq \geq \frac{3}{4} > 0$ である）。また $\beta = \dfrac{p^2}{1-pq}$ である。

全体の確率。1 回目の投げで条件付けると、

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ}) = p\alpha + q\beta = \frac{p^2 + p^2 q}{1-pq} = \frac{p^2(1+q)}{1-pq}.$$

小問 (ii)

ここでは α と β は、長さ 3 の連が必要なゲームについての確率を表すものとする。1 回目が表であるとする。

- HH に続いて H（確率 p^2）：A が勝つ。
- HHT（確率 pq）または HT（確率 q）：最初の裏がちょうど出たところであり、それ以前の表はもはや数えられないので、「1 回目が裏」の状況になり、A が勝つ確率は β である。

これらの場合ですべてを尽くしているので、

$$\alpha = p^2 + (q + pq)\,\beta,$$

となり、与えられた結果が得られる。2 つの面の役割を入れ替えると（「1 回目が裏」の状況では、TTT は B の勝ちとなり 0 を寄与する）、

$$\beta = (p + pq)\,\alpha.$$

考えてみよう 係数 $q+pq$ と $p+pq$ はどのようにして $1-p^2$ と $1-q^2$ になるか。

$p+q=1$ であるから、$q+pq=q(1+p)=(1-p)(1+p)=1-p^2$ であり、同様に $p+pq=p(1+q)=1-q^2$ である。これは直接考えても納得できる。$1-p^2$ は、最初の表に続く 2 回の投げがともに表ではない確率であり、それはまさに連が途切れる場合である。したがって方程式は

$$\alpha=p^2+(1-p^2)\beta, \qquad \beta=(1-q^2)\alpha,$$

となり、代入すると $\alpha\left[1-(1-p^2)(1-q^2)\right]=p^2$、すなわち

$$\alpha=\frac{p^2}{1-(1-p^2)(1-q^2)}.$$

を得る。($0<1-p^2<1$ かつ $0<1-q^2<1$ であるから、分母は正である。) 最後に、

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ})=p\alpha+q\beta=\alpha\left(p+q(1-q^2)\right)=\alpha\left(p+q-q^3\right)=\alpha\left(1-q^3\right),$$

であるから、

$$\mathrm{P}(\text{A が勝つ})=\frac{p^2(1-q^3)}{1-(1-p^2)(1-q^2)},$$

が示された。

小問 (iii)

長さ a と b の連についても同じ議論が成り立つ。1 回目が表のとき、続く $a-1$ 回がすべて表であれば (確率 p^{a-1}) A が勝ち、そうでなければその中に裏が現れる (確率 $1-p^{a-1}$)。後者の場合、ゲームはその裏から単に再スタートするので、「1 回目が裏」の状況になる。同様に、1 回目が裏のとき、B は確率 q^{b-1} で勝ち、そうでなければ B の連が完成する前に表が現れる。よって

$$\alpha=p^{a-1}+\left(1-p^{a-1}\right)\beta, \qquad \beta=\left(1-q^{b-1}\right)\alpha,$$

であり、したがって

$$\alpha=\frac{p^{a-1}}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}.$$

となる。ここでも 2 つの括弧はともに 0 と 1 の間に厳密に収まるので、分母は正である。すると

$$p\alpha+q\beta=\alpha\left(p+q-q^b\right)=\alpha\left(1-q^b\right),$$

であるから、

$$\boxed{\mathrm{P}(\text{A が勝つ})=\frac{p^{a-1}\left(1-q^b\right)}{1-\left(1-p^{a-1}\right)\left(1-q^{b-1}\right)}}$$

を得る。好みに応じて、分母を展開して $p^{a-1}+q^{b-1}-p^{a-1}q^{b-1}$ としてもよい。

$a=b=2$ の場合。 公式は

$$\frac{p(1-q^2)}{1-(1-p)(1-q)}=\frac{p(1-q)(1+q)}{1-pq}=\frac{p^2(1+q)}{1-pq},$$

となる。ここで分母では $1-p=q$、$1-q=p$ を、分子では $1-q=p$ を用いた。これは小問 (i) の結果と一致する。$a=b=3$ とおけば、小問 (ii) の結果がそのまま得られる。

検算

- **公平なコイン、小問 (*i*)。** $p=q=\frac{1}{2}$ のとき答えは $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}/\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$ であり、対称性から当然そうなるべき値である。(iii) でも $a=b$ かつ $p=\frac{1}{2}$ ならば同じことが起こる。
- **極端な場合。** $p\to 1$ のとき (iii) の答えは 1 に近づき、$p\to 0$ のとき 0 に近づく。これは当然そうあるべきである。
- **数値。** $p=0.4$ のとき、小問 (i) の答えは $0.16\times 1.6/0.76\approx 0.3368$、小問 (ii) の答えは ≈ 0.2713 である。200 000 回のゲームのコンピュータシミュレーションでは 0.336 と 0.271 が得られた。$p=0.55$、$a=4$、$b=2$ のとき公式は 0.2450 を与え、これもシミュレーションと一致した。

よくある間違い

- 面が変わった時点で、それまでの連はまったく意味をもたなくなることを忘れる。まさにこのことがあるからこそ、面が変わった後の状況は「その面が 1 回目」の状況と同じになるのである。
- (ii) で *HHT* の場合を見落とす。連は 2 回目の投げで途切れることも、3 回目の投げで途切れることもある。
- 「A が勝つ確率」の最終的な答えとして α を答えてしまう。さらに 1 回目の投げについて平均をとり、$p\alpha+q\beta$ を求める必要がある。

STEP のその先へ

これは吸収マルコフ連鎖（absorbing Markov chain）の第一段階解析（first-step analysis）である。状態は「現在の面と連の長さ」であり、吸収確率（absorption probability）は次の一歩で条件付けることによって得られる一次方程式を満たす。同じ手法を使え

ば、コイン投げにおいてあるパターンが現れるまでの期待待ち時間（expected waiting time）も求められ、さらにペニーのゲーム（Penney's game）へとつながる。このゲームでは、パターンの順序によって驚くべき非推移的（non-transitive）な結果が生じる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、マルコフ（Markov）連鎖と吸収をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。