解答例

STEP II 2020、第 10 問

力学 ・ エネルギーとつり合い

STEP II 2020、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

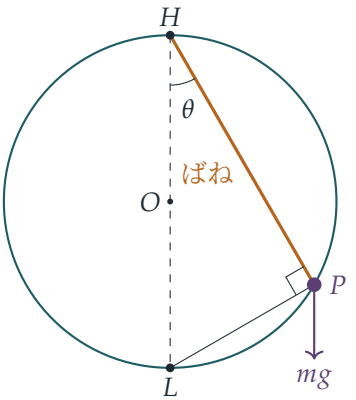
www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

HL は直径なので、半円に対する円周角（angle in a semicircle）から、ばねの長さと P の高さが θ を用いて直接表せる。すなわち $HP = 2a\cos\theta$ であり、P は H より $2a\cos^2\theta$ だけ下にある。針金はなめらかなので、その抗力（reaction）は仕事をしない。したがって問題全体は一つの関数、すなわち $c = \cos\theta$ の関数としての位置エネルギー（potential energy）についての問題となる。これは c の 2 次式になることがわかり、平方完成（completing the square）によって両方の小問が一度に解ける。

解答

P をなめらかな針金上の質点としてモデル化し、ばねは軽く、（伸びていても縮んでいても）フックの法則（Hooke's law）に従うものとする。円の中心を O とする。



幾何。HL は直径なので $\angle HPL = 90°$ であり、斜辺（hypotenuse）が $2a$ の直角三角形 HPL において

$$HP = 2a\cos\theta.$$

H から P までの鉛直方向の落差は $HP\cos\theta = 2a\cos^2\theta$ である。P が L からどちら側を回って H に向かう場合でも、θ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の範囲を動くので、$\cos\theta > 0$ である。

位置エネルギー。H の高さを重力による位置エネルギーの基準とし、$c = \cos\theta$ とおく。ばねの伸び（extension）は $2ac - l$ なので

$$\begin{aligned} V &= -2mga\,c^2 + \frac{\lambda}{2l}(2ac - l)^2 \\ &= \frac{2a(a\lambda - mgl)}{l}\,c^2 - 2a\lambda\,c + \frac{\lambda l}{2}. \end{aligned}$$

小問 (i)

なめらかな針金の抗力は仕事をしないので、P が平衡（equilibrium）にあるのは、ちょうど $\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta = 0$ となるところである。（同値な言い方をすれば、接線方向の力がつり合うところである。）連鎖律（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}c} = -\sin\theta\left(\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\,c - 2a\lambda\right).$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である $\theta = \alpha$ では $\sin\alpha \neq 0$ なので、括弧の中が零でなければならない：

$$\frac{4a(a\lambda - mgl)}{l}\cos\alpha = 2a\lambda.$$

右辺は零でないので $a\lambda \neq mgl$ であり、割り算ができる：

$$\cos\alpha = \frac{\lambda l}{2(a\lambda - mgl)},$$

となり、示すべき式が得られた。

このような α が存在するためには $0 < \cos\alpha < 1$ が必要である。

- $\cos\alpha > 0$：分子 λl は正なので、$a\lambda > mgl$ が必要である。
- $\cos\alpha < 1$：正の量 $2(a\lambda - mgl)$ を両辺に掛けると $\lambda l < 2a\lambda - 2mgl$、すなわち $\lambda(2a - l) > 2mgl$ を得る。

$l < 2a$ なので、2 つ目の条件は $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$ である。$\dfrac{2mgl}{2a - l} > \dfrac{2mgl}{2a} = \dfrac{mgl}{a}$ なので、これから 1 つ目の条件も従う。よって $\alpha > 0$ の平衡が存在するのは $\lambda > \dfrac{2mgl}{2a - l}$ のときに限る。（逆に、これが成り立てば、この式は実際の角 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ を与え、対称性から $-\alpha$ も平衡である。）

小問 (ii)

考えてみよう $\cos\alpha$ が単独で現れるような、V のうまい書き方はないだろうか？

ある。平方完成すればよい。$K = \dfrac{2a(a\lambda - mgl)}{l}$ とおく。小問 (i) より $\dfrac{a\lambda - mgl}{l} = \dfrac{\lambda}{2\cos\alpha}$ なので

$$K = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}, \qquad \frac{2a\lambda}{K} = 2\cos\alpha.$$

したがって

$$V = K\left(c^2 - 2c\cos\alpha\right) + \frac{\lambda l}{2} = \frac{a\lambda}{\cos\alpha}(c - \cos\alpha)^2 + \text{定数}.$$

（検算として、これは $c = \cos\alpha$、すなわち小問 (i) で求めた平衡で最小となる。）小問 (i) で平衡が存在するために必要とされたとおり、$a\lambda > mgl$ を仮定する。よって $\cos\alpha > 0$ かつ $K > 0$ である。

L では $\theta = 0$、$c = 1$ である。L と一般の点との間でエネルギー保存則（conservation of energy）を用いると

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mu^2 + \frac{a\lambda}{\cos\alpha}\Big[(1 - \cos\alpha)^2 - (c - \cos\alpha)^2\Big].$$

$\dfrac{\cos\alpha}{a\lambda} > 0$ を掛けると、

$$\frac{mv^2\cos\alpha}{2a\lambda} = D - (c - \cos\alpha)^2, \qquad \text{ただし} D = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha. \qquad (*)$$

よって P が $\theta = \beta$ で静止するならば、そこで $v = 0$ であり

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (1 - \cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha,$$

これが求める方程式である。

考えてみよう この方程式は $\cos\beta$ について 2 つの解をもつ。実際に止まる点はどちらで、それが H より手前になるのはどのようなときか？

P が L から H に向かって上がるにつれて、c は 1 から 0 に向かって減少する。$(*)$ より、$(c - \cos\alpha)^2 < D$ である限り P は動き続ける。したがって、1 から減少していく c が区間 $(\cos\alpha - \sqrt{D},\ \cos\alpha + \sqrt{D})$ の近い方の端に達したところで初めて止まる。ここで $D \geq (1 - \cos\alpha)^2$（$u > 0$ ならば等号は成り立たない）なので、$\cos\alpha + \sqrt{D} > 1$ かつ $\cos\alpha - \sqrt{D} < 1$ である。よって $c = 1$ はこの区間の内部にあり、止まるときの値は

$$\cos\beta = \cos\alpha - \sqrt{D}.$$

P が（$c = 0$ となる）H に達する前に止まるのは、ちょうどこれが正のとき、すなわち $\sqrt{D} < \cos\alpha$、つまり $D < \cos^2\alpha$ のときである：

$$\begin{aligned} & (1-\cos\alpha)^2 + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < \cos^2\alpha \\ \iff \quad & 1 - 2\cos\alpha + \frac{mu^2}{2a\lambda}\cos\alpha < 0 \\ \iff \quad & \frac{mu^2}{2a\lambda} < 2 - \sec\alpha, \end{aligned}$$

ここで最後の段階では $\cos\alpha > 0$ で割った。したがって P が H より手前で静止するのは次の場合に限る：

$$u^2 < \frac{2a\lambda}{m}(2 - \sec\alpha).$$

特に、このためには $\sec\alpha < 2$、すなわち $\alpha < \frac{\pi}{3}$ が必要である。そうでなければ、L での速さによらず P は H に達する。

検算

- $m = 1$、$g = 10$、$a = 1$、$l = 1$、$\lambda = 40$ とする（単位系は整合しているものとする）。このとき $\lambda > 2mgl/(2a - l) = 20$ であり、$\cos\alpha = 40/60 = \frac{2}{3}$ である。臨界値は $u^2 = 80(2 - \frac{3}{2}) = 40$ である。$u^2 = 40$ のとき $D = \frac{1}{9} + \frac{40}{80}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ なので、$\cos\beta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ となる。質点はちょうど H に達し、期待どおりである。
- $u = 0$ ならば $D = (1-\cos\alpha)^2$ かつ $\cos\beta = 1$ である。L で静止している質点はそこにとどまるが、L もまた平衡なので、これは正しい。
- 多数のランダムなパラメータの組について運動方程式（equation of motion）を計算機で数値積分したところ、u^2 が臨界値より小さいときにちょうど、質点は予測どおりの $\cos\beta$ で止まった。

よくある間違い

- $HP = 2a\sin\theta$ としてしまう、あるいは誤った角を用いて O から高さを測ってしまう。中心角は θ ではなく 2θ であることに注意しよう。
- 小問 (i) で $\cos\alpha > 0$ だけを確かめてしまう。λ の範囲を与えるのは条件 $\cos\alpha < 1$ の方である。
- $\cos\beta$ として解 $\cos\alpha + \sqrt{D}$ を選んでしまう。これは 1 を超えるので、針金上の位置を表さない。

STEP のその先へ

エネルギーを $K(c-\cos\alpha)^2$ + 定数 と書くことは、大学の力学における重要な考え方の 1 次元版である。自由度（degree of freedom）が 1 の系では、平衡点はポテンシャルの停留点（stationary point）であり、その安定性（stability）はそれらの点が極小か極大かによって決まり、運動が許される領域はエネルギーがポテンシャルを上回る場所である。ここでは、$\alpha > 0$ が存在するとき、L は V の極大点となり、したがって不安定な平衡（unstable equilibrium）となる。ばねのせいで針金の最下点が不安定になるのである！Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方に沿ってエネルギー図と安定性を論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。