解答例

STEP II 2020、第 1 問

純粋数学 ・ 置換積分

STEP II 2020、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2020 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696589-2020-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの被積分関数（integrand）も、二つの 1 次式のべきの積であり、その指数の和は -2 である。このような被積分関数に対しては、二つの 1 次式の比（あるいはその平方根）で置換（substitution）するのが正しい。そうすると二つの括弧が一度に吸収され、残るのは単純なべき関数か、標準的な逆正接（arctangent）の形になる。小問 (i) では与えられた置換でこれが起こる様子を見せ、小問 (ii) ではその技法をまねることが求められ、小問 (iii) では自力でそれに気づくことが求められている。

解答

小問 (i)

$x = \dfrac{1}{1-u}$ とおくと

$$x - 1 = \frac{1-(1-u)}{1-u} = \frac{u}{1-u}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{(1-u)^2}.$$

である。u が $(0,1)$ を動くとき、x は $(1,\infty)$ を動き、$u = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ である。$0 < u < 1$ より根号の中の量はすべて正であるから、

$$x^{3/2}(x-1)^{1/2} = \frac{1}{(1-u)^{3/2}} \cdot \frac{u^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{u^{1/2}}{(1-u)^2}.$$

ここで $(1-u)^2$ の因子は $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ とちょうど打ち消し合う：

$$\int \frac{1}{x^{3/2}(x-1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{u^{1/2}}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2u^{1/2}+c = 2\sqrt{\frac{x-1}{x}}+c.$$

小問 (ii)

小問 (i) では、$u=\frac{x-1}{x}$ は二つの 1 次式の比であった。ここではその考え方をまねて

$$u=\frac{x-2}{x+1},\qquad \text{すなわち}\qquad x+1=\frac{3}{1-u},\quad x-2=\frac{3u}{1-u},$$

とおく。$x-2=(x+1)-3$ だからである。$x>2$ のとき $0<u<1$ であり、$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\dfrac{3}{(1-u)^2}$ である。すると

$$(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2} = \frac{3^{3/2}u^{3/2}}{(1-u)^{3/2}}\cdot\frac{3^{1/2}}{(1-u)^{1/2}} = \frac{9u^{3/2}}{(1-u)^2},$$

となるので

$$\int \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(1-u)^2}{9u^{3/2}}\cdot\frac{3}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int u^{-3/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{3}u^{-1/2}+c = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}+c.$$

微分すれば確かめられる。$f=\frac{x+1}{x-2}$ とおくと $f'=-\frac{3}{(x-2)^2}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\tfrac{2}{3}\sqrt{f}\right) = -\frac{f'}{3\sqrt{f}} = \frac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} = \frac{1}{(x-2)^{3/2}(x+1)^{1/2}}.$$

小問 (iii)

今回は置換が与えられていない。余分な因子 $x-1$ があるため、被積分関数は比の単純なべきにはなっていないが、二つの平方根はこれまでと同じタイプである。

> **考えてみよう** これまでの二つの答えはどちらも、1 次式の比の平方根であった。そのような平方根を新しい変数にとると、どうなるだろうか。

次のようにおいてみる。

$$t=\sqrt{\frac{x-2}{3x-2}}.$$

x が 2 から ∞ まで増加するとき、$\frac{x-2}{3x-2}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3x-2)}$ は 0 から $\frac{1}{3}$ に向かって増加するので、t は 0 から $\frac{1}{\sqrt{3}}$ まで増加し、つねに $0\le t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。$t^2(3x-2)=x-2$ を x

について解くと

$$x = \frac{2(1-t^2)}{1-3t^2},$$

となる。ここで $1-3t^2 > 0$ である。これより

$$x-1 = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, \qquad 3x-2 = \frac{4}{1-3t^2},$$

であり、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2[-2t(1-3t^2)+6t(1-t^2)]}{(1-3t^2)^2} = \frac{8t}{(1-3t^2)^2}.$$

である。$\sqrt{x-2} = t\sqrt{3x-2}$ であるから、二つの平方根はきれいにまとまる：

$$(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = t\,(3x-2) = \frac{4t}{1-3t^2}.$$

したがって分母全体は

$$(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2} = \frac{4t(1+t^2)}{(1-3t^2)^2},$$

となり、ここでもすべてが $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と打ち消し合う：

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)^{1/2}(3x-2)^{1/2}} = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{(1-3t^2)^2}{4t(1+t^2)} \cdot \frac{8t}{(1-3t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[\arctan t\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

となり、示すべき結果が得られた。

もとの積分は両端で広義積分（improper integral）であるが、収束（converge）する。$x=2$ の近くでは被積分関数は $\frac{1}{2}(x-2)^{-1/2}$ のようにふるまい、x が大きいところでは $\frac{1}{\sqrt{3}}x^{-2}$ のようにふるまう。置換によって、有限区間上の連続関数の通常の積分に変わるので、極限を別々にとる必要はない。

検算

- (i) と (ii) の答えを微分する。(i) については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2\sqrt{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1/2} = x^{-3/2}(x-1)^{-1/2}$ である。
- 符号：(ii) の被積分関数は正であるから、原始関数（antiderivative）は増加しなければならない。実際、x が大きくなると $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ は 1 に向かって減少するので、そうなっている。
- 数値：(i) の $\int_{1.5}^{3}$ と (ii) の $\int_{2.5}^{4}$ をシンプソンの公式（Simpson's rule）で計算すると、原始関数から得られる値（0.47829… と 0.70974…）と一致する。(iii) の積分を $x=3$ で分割して直接計算すると $1.0471975\ldots = \frac{\pi}{3}$ となる。

よくある間違い

- (iii) で積分区間の端を変え忘れる。上端は ∞ ではなく $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、$\frac{\pi}{6}$ はここから出てくる。
- (i) や (ii) の答えを u で書いたままにして、問題の要求どおり x に戻さない。
- $1-u$ の半整数べきの扱いを誤る。$(1-u)^{-3/2}(1-u)^{-1/2} = (1-u)^{-2}$ のように注意深くまとめること。

STEP のその先へ

$\sqrt{(x-a)(x-b)}$ から作られる被積分関数は、ここで用いたような置換によってつねに有理化できる。これは、x と $\sqrt{2\text{次式}}$ の有理関数（rational function）の積分に関する古典的な理論（オイラー（Euler）置換）の一部である。また小問 (iii) は無限区間上の広義積分でもあり、こうした積分を極限によって意味づけることは、大学 1 年次の解析学（analysis）の標準的な話題である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は広義積分を丁寧に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）にはこの種の STEP の積分問題がさらに載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。