解答例

STEP III 2019、第 9 問

力学 ・ 動く半球上の質点

STEP III 2019、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

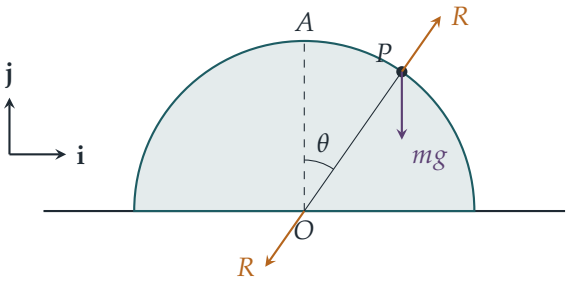
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

二つの面はどちらもなめらか（smooth）なので、系（質点と半球）にはたらく外力はどれも水平成分をもたない。したがって水平方向の運動量は保存され（運動量保存（conservation of momentum））、これによって半球の速さと質点の角速度が結びつく。また重力以外に仕事をする力はないので、エネルギーも保存される。この二つの法則から小問 (ii) が得られる。質点が面から離れることについては、垂直抗力（normal reaction）が 0 になることを確かめるのが明快な判定法である。誘導で与えられたベクトルは、その方向の成分をとったときに未知の $\ddot{\theta}$ が消えるように選ばれている。

解答

モデル：P は質点（particle）、半球は剛体であり、接触はすべてなめらかであるとする。接している間、P と半球の間にはたらく力は OP に沿った垂直抗力 R のみであり、台は半球を鉛直方向に押す。



半球にはたらく抗力（見やすさのため O に描いてある）は、P にはたらく抗力と大き

さが等しく向きが反対である。

小問 (i)

時刻 t において中心 O は $-s\,\mathbf{i}$ の位置に移動しており、P はそこから距離 a だけ $\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$ の方向にある。よって

$$\mathbf{r}=(a\sin\theta-s)\,\mathbf{i}+a\cos\theta\,\mathbf{j},$$

であり、t で微分すると（$\sin\theta$ と $\cos\theta$ に連鎖律（chain rule）を用いる）

$$\dot{\mathbf{r}}=(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)\,\mathbf{i}-a\dot\theta\sin\theta\,\mathbf{j},$$

となり、示すべき式が得られる。

系にはたらく外力は二つの重力と台からの抗力であり、いずれも鉛直方向である。したがって水平方向の運動量の総和は初期値のまま保たれ、その初期値は 0 である（初めのわずかなずれによって生じる速さは無視できるとする）。半球の速度は $-\dot s\,\mathbf{i}$ であるから

$$m(a\dot\theta\cos\theta-\dot s)-M\dot s=0\quad\Longrightarrow\quad \dot s=\frac{m}{m+M}\,a\dot\theta\cos\theta=(1-k)\,a\dot\theta\cos\theta,$$

となる。ここで $1-k=\dfrac{m}{m+M}$ を用いた。これを $\dot{\mathbf{r}}$ の $\mathbf{i}$ 成分に代入すると

$$a\dot\theta\cos\theta-(1-k)a\dot\theta\cos\theta=k\,a\dot\theta\cos\theta,\qquad\text{よって}\qquad \dot{\mathbf{r}}=a\dot\theta\,(k\cos\theta\,\mathbf{i}-\sin\theta\,\mathbf{j}).$$

小問 (ii)

抗力は全体として仕事をしない。台からの抗力は半球の運動と垂直であり、P と半球の間にはたらく一対の力 $\pm R$ は、P が面上にとどまる限り仕事の総和が 0 になる（両者の相対速度は面に沿っており、R と垂直である）。よって運動エネルギー（kinetic energy）と位置エネルギー（potential energy）の和は保存される。P は $a(1-\cos\theta)$ だけ下がっており、初めはすべてが（実質的に）静止しているので

$$\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k^2\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\tfrac12 M\dot s^2=mga(1-\cos\theta).$$

小問 (i) より $M\dot s^2=M(1-k)^2a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$ である。すると $a^2\dot\theta^2\cos^2\theta$ の係数の合計は

$$mk^2+M(1-k)^2=\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM}{m+M}=mk.$$

したがって $\tfrac12 ma^2\dot\theta^2(k\cos^2\theta+\sin^2\theta)=mga(1-\cos\theta)$ となり、両辺を $\tfrac12 ma$ で割ると

$$a\dot\theta^2(k\cos^2\theta+\sin^2\theta)=2g(1-\cos\theta).$$

小問 (iii)

$\mathbf{u} = \sin\theta\,\mathbf{i} + k\cos\theta\,\mathbf{j}$ とおく。小問 (i) の最後の結果を微分すると

$$\ddot{\mathbf{r}} = a\ddot{\theta}\,(k\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j}) - a\dot{\theta}^2\,(k\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

$k\cos\theta\sin\theta - \sin\theta\,k\cos\theta = 0$ であるから、第 1 の括弧は $\mathbf{u}$ と垂直である。よって

$$\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{u} = -a\dot{\theta}^2(k\sin^2\theta + k\cos^2\theta) = -k\,a\dot{\theta}^2.$$

考えてみよう なぜこの特定のベクトルが役に立つのだろうか。

このベクトルは、何もわかっていない $\ddot{\theta}$ の項を消し、小問 (ii) で求めた $\dot{\theta}^2$ だけを残してくれるのである。ここで P についてのニュートン（Newton）の運動の第二法則（Newton's second law）と比べる：

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\,\mathbf{j} + R(\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}).$$

$\mathbf{u}$ 方向の成分をとり、上の結果と等置すると

$$-mk\,a\dot{\theta}^2 = -mgk\cos\theta + R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta),$$

よって

$$R(\sin^2\theta + k\cos^2\theta) = mk(g\cos\theta - a\dot{\theta}^2).$$

質点が半球から離れるのは R が 0 まで減少したときである。$k > 0$ であるから、$\theta = \alpha$ においてこれより

$$a\dot{\theta}^2 = g\cos\alpha.$$

3 次方程式。 $c = \cos\alpha$ とおき、$\sin^2\alpha = 1 - c^2$ を用いて $\theta = \alpha$ における小問 (ii) の式を使うと

$$gc(kc^2 + 1 - c^2) = 2g(1 - c) \quad\Longrightarrow\quad (1-k)\,c^3 - 3c + 2 = 0.$$

$f(x) = (1-k)x^3 - 3x + 2$ とおく。m と M はともに正であるから $0 < 1 - k < 1$ である。

- $-1 \le x \le 1$ において $f'(x) = 3\big((1-k)x^2 - 1\big) < 0$ であるから、f はそこで狭義単調減少（strictly decreasing）であり、$[-1,1]$ における根は高々一つである。
- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}(1-k) - 2 + 2 = \frac{8}{27}(1-k) > 0$ かつ $f(1) = -k < 0$ である。

よって $[-1,1]$ における唯一の根は $\frac{2}{3}$ と 1 の間に（端点を含まずに）ある。$\cos\alpha$ は $[-1,1]$ に属さなければならないので、それはこの根であり

$$\cos\alpha > \frac{2}{3}.$$

（これは R の式とも整合している。小問 (ii) を代入すると、$g\cos\theta - a\dot{\theta}^2$ は $-f(\cos\theta)$ と同じ符号をもつことがわかる。これは $\theta = 0$ で正であり、この根で初めて 0 になるので、P は確かにそのときまで接触を保つ。）

検算

- $M \to \infty$ とすると $k \to 1$ となって半球は動かず、3 次方程式（cubic）は $-3c + 2 = 0$ となる。これは固定された球面から滑り落ちる質点についてのおなじみの結果 $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ である。半球が動くことで、質点はより早く、すなわちより大きい $\cos\alpha$ で離れる。
- 質量が等しい場合、$1 - k = \frac{1}{2}$ であり、3 次方程式 $c^3 - 6c + 4 = 0$ は $(c-2)(c^2 + 2c - 2) = 0$ と因数分解できる。これより $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$ となり、$\frac{2}{3}$ より大きい。
- いくつかの質量比について、運動全体をコンピュータで逐次的に数値シミュレーションしたところ、途中で小問 (i) と (ii) の関係式が成り立つことが確認され、$m = M$ のときには抗力が $\cos\theta \approx 0.732$ で 0 になることがわかった。これは 3 次方程式と一致する。

よくある間違い

- 固定された球面の場合の条件 $a\dot{\theta}^2 = g\cos\theta$ を根拠なしに用いること。この問題では半球が加速するので、質点の加速度は固定点のまわりの円運動の加速度だけではない。離れる瞬間にこの式がたまたま成り立つのは、$R = 0$ であればその瞬間に半球の水平方向の加速度が 0 になるからにすぎない。
- エネルギーの式で半球の運動エネルギー $\frac{1}{2}M\dot{s}^2$ を忘れること。
- 根が $\frac{2}{3}$ と 1 の間にあることだけを示し、$[-1, 1]$ に別の根がないことを確かめないこと。

STEP のその先へ

これは 2 自由度（two degrees of freedom）の系であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を使えば系統的に扱うことができる。運動エネルギーと位置エネルギーを θ と s で表すと、s がラグランジアンに現れないことから、水平方向の運動量の保存が自動的に現れる（このような座標は「循環座標」（ignorable coordinate）と呼ばれ、ネーター（Noether）の定理によって対称性と結びつけられる）。R のような束縛

力（constraint force）は、ここで行ったのとまったく同じように、後から求められる。まずニュートン力学の直観を養うには、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。