解答例

# STEP III 2019、第 8 問

純粋数学 ・ ベクトルと空間図形

**STEP III 2019、問 8**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

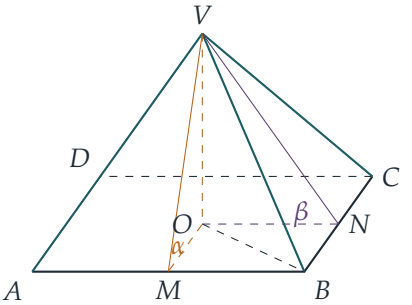
四角錐（pyramid）に座標を設定する。各斜面は水平な底面の辺を 1 本含むので、その法線（normal）はその辺に垂直である。このため法線は鉛直な平面内にあることになり、その平面上で斜面と底面のなす角を直接読み取ることができる。あとは 2 つの斜面のなす角を法線どうしの内積（dot product）から求め、注意深く三角関数の式変形を行い、相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）を一度使えばよい。

## 解答

底面の中心を原点 $O$ とし、$\mathbf{i}$ を $AB$ の向き、$\mathbf{j}$ を $BC$ の向き、$\mathbf{k}$ を鉛直上向きにとる。

$$A=(-a,-b,0),\quad B=(a,-b,0),\quad C=(a,b,0),\quad D=(-a,b,0),\quad V=(0,0,h),$$

とおく。ただし $a,b,h>0$ である。




$M=(0,-b,0)$ を $AB$ の中点、$N=(a,0,0)$ を $BC$ の中点とする。$VA=VB$ であるから、直線 $VM$ は面 $AVB$ 上にあって $AB$ に垂直であり、底面上の $OM$ も $AB$ に垂直で

ある。よって斜面と底面のなす角は角 $VMO$ であり、

$$\tan\alpha = \frac{h}{b}, \qquad \text{同様に} \qquad \tan\beta = \frac{h}{a}.$$

**小問 (i)**

面 $AVB$ は方向 $\overrightarrow{AB} \parallel \mathbf{i}$ と $\overrightarrow{MV} = b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}$ を含む。法線ベクトルの 1 つは

$$\mathbf{i} \times (b\,\mathbf{j} + h\,\mathbf{k}) = -h\,\mathbf{j} + b\,\mathbf{k}.$$

である。これをその長さ $\sqrt{h^2 + b^2}$ で割り、$\tan\alpha = h/b$ を用いると、単位法線ベクトル（unit normal）

$$\mathbf{n}_1 = -\sin\alpha\,\mathbf{j} + \cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

が得られる。その $\mathbf{j}$ 成分は負であるから、これは四角錐の外側を向いている（面 $AVB$ は $y < 0$ の側にある）。

まったく同様に、面 $BVC$ は $\mathbf{j}$ と $\overrightarrow{NV} = -a\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{k}$ を含み、その外向き単位法線ベクトルは

$$\mathbf{n}_2 = \sin\beta\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{k}.$$

である。したがって

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta.$$

? **考えてみよう** 法線どうしのなす角は、面どうしのなす角そのものだろうか、それともその補角（supplement）だろうか。

共通の辺 $VB$ に垂直な断面を考える。2 つの面は内角 $\pi - \theta$ で交わる 2 本の直線として現れ、各外向き法線はそれぞれの直線に垂直で、立体から離れる向きを向いている。一方の面を内角だけ回転させて他方の面に重ねると、外向き法線も同じ角だけ回転するが、断面上では 2 本の法線はどちらも**外向き**であるから、両者のなす角は $\pi - (\pi - \theta) = \theta$ となる。（立方体を思い浮かべるとよい。面どうしは $\frac{\pi}{2}$ で交わり、法線どうしも $\frac{\pi}{2}$ をなす。四角錐を平たくつぶしていくと、面どうしのなす角は $\pi$ に近づき、法線どうしのなす角は 0 に近づく。）したがって

$$\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \cos\alpha\cos\beta,$$

となり、示すべき式が得られた。$0 < \cos\alpha\cos\beta < 1$ であるから $\theta$ は鋭角であり、これは面どうしが鈍角で交わることと整合している。

**小問 (ii)**

$V$ から下ろした垂線の足は $O$ であるから、$BV$ と底面のなす角は角 $VBO$ であり、

$$\cot\phi = \frac{OB}{h} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{h}.$$

である。したがって

$$\cot^2\phi = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \cot^2\beta + \cot^2\alpha,$$

となる。ここで $\cot\beta = a/h$ と $\cot\alpha = b/h$ を用いた。これが 1 つ目の結果である。

2 つ目の結果を示すため、$p = \cos^2\alpha, q = \cos^2\beta$ とおくと、小問 (i) より $\cos^2\theta = pq$ である。このとき

$$\cot^2\phi = \frac{p}{1-p} + \frac{q}{1-q} = \frac{p+q-2pq}{(1-p)(1-q)}.$$

$\cos^2\phi = \dfrac{\cot^2\phi}{1+\cot^2\phi}$ であるから、

$$1+\cot^2\phi = \frac{(1-p)(1-q)+p+q-2pq}{(1-p)(1-q)} = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)},$$

が必要であり、割り算をすると

$$\cos^2\phi = \frac{p+q-2pq}{1-pq} = \frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

を得る。($\cos\theta < 1$ であるから分母は正である。)

さて、$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ は正であるから、相加・相乗平均の不等式より

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta \ \geq\ 2\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\theta,$$

であり、$1-\cos^2\theta > 0$ であるから

$$\cos^2\phi \ \geq\ \frac{2\cos\theta-2\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}.$$

**考えてみよう** この下界から、$\phi$ と $\theta$ について何がわかるのだろうか。

これを簡単にして $\cos^2\theta$ と比べる。正の因数 $1-\cos\theta$ で約分すると

$$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}.$$

$c = \cos\theta \in (0,1)$ とおくと

$$\frac{2c}{1+c} - c^2 = \frac{c\,(2-c-c^2)}{1+c} = \frac{c\,(1-c)(2+c)}{1+c} > 0.$$

よって $\cos^2\phi \geq \dfrac{2c}{1+c} > \cos^2\theta$ である。$\phi$ と $\theta$ はともに $(0, \frac{\pi}{2})$ にあり、この区間で余弦は正かつ減少するから、$\cos\phi > \cos\theta$ より $\phi < \theta$ が得られる。

## 検算

- 底面が正方形で、$h$ が 1 辺の半分に等しい場合（$a = b = h$）：$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ であるから $\cos\theta = \frac{1}{2}$、$\theta = 60°$ である。直接計算すると $\cot\phi = \sqrt{2}$ であるから $\cot^2\phi = 2 = 1 + 1$ であり、$\phi \approx 35.26° < 60°$ となる。また $\cos^2\phi = \frac{2}{3}$ であり、$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2})/(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2}{3}$ と一致する。
- $10^5$ 個の無作為な四角錐について、$VB$ を通る断面から面どうしのなす角を直接測るコンピュータによる検証を行ったところ、$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ および $\phi$ に関する 2 つの式のいずれとも一致し、常に $\phi < \theta$ となった。

## よくある間違い

- 一方の面には内向き法線を、他方の面には外向き法線をとってしまうこと。このとき内積の符号が逆になり、$\cos(\pi - \theta)$ が得られてしまう。
- $\alpha$ を斜高（slant height）$VM$ に沿ってではなく、辺 $VA$ に沿って測ってしまうこと。2 平面のなす角は、その交線（line of intersection）に垂直な方向で測らなければならない。
- $\cos^2\phi \geq \dfrac{2\cos\theta}{1 + \cos\theta}$ で止めてしまい、これが $\cos^2\theta$ より大きいことを示さないこと。

## STEP のその先へ

2 平面のなす角は、その法線どうしのなす角に等しい（補角をとる違いを除いて）。これは、多変数微積分（multivariable calculus）や微分幾何学（differential geometry）において法線を用いて曲面を記述する考え方の出発点である。また、恒等式 $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ は、球面上のピタゴラスの定理（spherical Pythagoras theorem）が姿を変えたものでもある。実際、3 本の法線 $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ は直角球面三角形をなす。内積と外積（cross product）の感覚を深めるには、Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。