解答例

STEP III 2019、第 7 問

純粋数学 • 曲線の概形

STEP III 2019、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

この方程式には x^2 と y^2 しか現れないので、x^2（あるいは y^2）についての 2 次方程式とみなせる。これにより二つの道具が同時に手に入る。一つは判別式（discriminant）であり、曲線がどのような y の値をとりうるかを教えてくれる。もう一つは x^2 を y で表す明示的な公式である。原点の近くでの形を調べるには最も次数の低い項だけを残し、原点から遠く離れたところでは最も次数の高い項だけを残す。特別な場合 $a = b$ では、方程式は完全に因数分解できる。

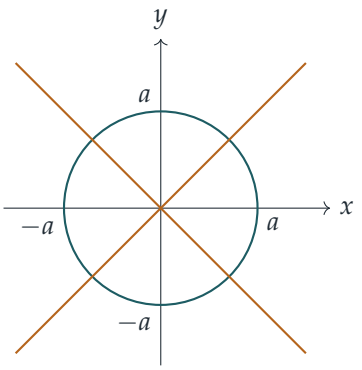
解答

小問 (i)

$a = b$ のとき、すべての項を一方の辺に移し、4 次の項（quartic terms）と 2 次の項をまとめると

$$\begin{aligned} 0 &= (y^4 - x^4) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(y^2 + x^2) - a^2(y^2 - x^2) \\ &= (y^2 - x^2)(x^2 + y^2 - a^2). \end{aligned}$$

したがって、点が曲線上にあるのは $y = \pm x$ または $x^2 + y^2 = a^2$ のときであり、かつそのときに限る。すなわち、悪魔の曲線（Devil's Curve）は 2 直線 $y = x$、$y = -x$ と、原点を中心とする半径 a の円とを合わせたものである。



小問 (ii)(a)

ここでは $a = 2$、$b = \sqrt{5}$ であり、曲線は $y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$ である。$y \geq 0$ を固定し、$X = x^2$ とおく。$x \geq 0$ である点 (x, y) が曲線上にあるのは、$X \geq 0$ が

$$X^2 - 4X - (y^4 - 5y^2) = 0.$$

を満たすときであり、かつそのときに限る。これが実数解をもつためには、判別式が負でないことが必要である：

$$\begin{aligned} 16 + 4(y^4 - 5y^2) &= 4(y^4 - 5y^2 + 4) = 4(y^2 - 1)(y^2 - 4) \\ &= 4(y+1)(y+2)(y-1)(y-2) \geq 0. \end{aligned}$$

$y \geq 0$ より因数 $y+1$ と $y+2$ は正であるから、$(y-1)(y-2) \geq 0$ が必要となる。すなわち

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{または} \quad y \geq 2.$$

逆に、このような y はすべて実際に現れる。解は

$$X = 2 \pm \sqrt{D}, \qquad D = (y^2 - 1)(y^2 - 4),$$

であり、大きい方の解は 2 以上なので、x^2 として正当な値である。この x^2 の公式は以下で用いる。

小問 (ii)(b)

原点の近くでは、4 次の項 y^4 と x^4 は y^2 や x^2 に比べてごく小さい。したがって曲線はおよそ

$$-5y^2 \approx -4x^2, \qquad \text{すなわち} \qquad y \approx \tfrac{2}{\sqrt{5}}\, x \quad (x, y \geq 0).$$

となる。曲線は傾き $2/\sqrt{5} \approx 0.89$ の直線に沿って原点から出ていき、これは直線 $y = x$ より少し下である。((a) の公式もこれと一致する。解 $X = 2 - \sqrt{D}$ において、二項展開（binomial expansion）により $x^2 = \frac{5}{4}y^2 + O(y^4)$ が得られる。)

原点から非常に遠いところでは、最高次の項が支配的になる。$y^4 \approx x^4$ より $y \approx x$ である。さらに精密に調べることができる。方程式を

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) = 5y^2 - 4x^2 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - x^2 = \frac{5y^2 - 4x^2}{y^2 + x^2}.$$

と書き直す。$y/x \to 1$ であるから、右辺は $\frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}$ に近づく。よって $y^2 \approx x^2 + \frac{1}{2}$ であり、これから

$$y \approx x + \frac{1}{4x}.$$

が得られる。曲線は直線 $y = x$ を漸近線（asymptote）にもち、**上側から**それに近づく。実際、原点以外ではこの直線と交わることはない。方程式に $y = x$ を代入すると $x^2 = 0$ となるからである。

小問 (ii)(c)

$y^4 - 5y^2 = x^4 - 4x^2$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると

$$(4y^3 - 10y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x^3 - 8x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x^2 - 2)}{y(2y^2 - 5)}.$$

接線（*tangent*）が x 軸に平行な場合：分子が 0 で分母が 0 でないことが必要である。よって $x = 0$ または $x = \sqrt{2}$ である。

- $x = 0$ のとき：$y^4 = 5y^2$ となるので、$y = 0$ または $y = \sqrt{5}$ である。$(0, \sqrt{5})$ では分母は $\sqrt{5}(10 - 5) \neq 0$ なので、この点は条件を満たす。
- $x = \sqrt{2}$ のとき：$y^4 - 5y^2 = 4 - 8$ より $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$ となり、$y = 1$ または $y = 2$ を得る。これらの点での分母は -3 と 6 で、いずれも 0 でない。

考えてみよう 分子が同じく 0 になる原点を数えないのはなぜか？

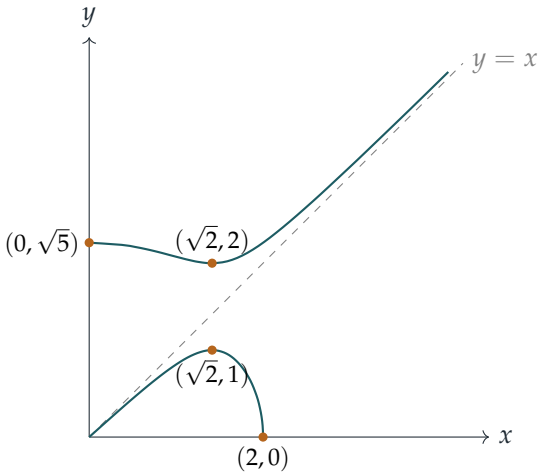
$(0,0)$ では分母も 0 になるので、公式は $0/0$ となり何の情報も与えない。この問題は (b) ですでに決着している。曲線は傾き 0 ではなく、傾き $2/\sqrt{5}$ で原点を通過する。

したがって、接線が水平になるのは $(0, \sqrt{5})$、$(\sqrt{2}, 1)$、$(\sqrt{2}, 2)$ である。

接線が y 軸に平行な場合：分母が 0 で分子が 0 でないことが必要であるから、$y = 0$ または $y^2 = \frac{5}{2}$ である。しかし $\sqrt{5/2} \approx 1.58$ は 1 と 2 の間に厳密に含まれるので、(a) により除外される。$y = 0$ のときは $x^4 = 4x^2$ となるので、$x = 0$（再び原点であり、上と同じ理由で除外される）または $x = 2$ である。$(2,0)$ での分子は $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \neq 0$ である。よって、そのような点は $(2,0)$ だけである。

$x \geq 0$、$y \geq 0$ における概形 $x^2 = 2 \pm \sqrt{D}$ を用いると、曲線は二つの部分からなる。

- $0 \le y \le 1$ **におけるループ**。解 $2 - \sqrt{D}$ は 0（$y = 0$ のとき）から 2（$y = 1$ のとき）まで増加し、$2 + \sqrt{D}$ は 4 から 2 まで減少する。したがって曲線は傾き $2/\sqrt{5}$ で原点を出発し、$(\sqrt{2}, 1)$ で極大となり、下降して $(2, 0)$ で x 軸と垂直に交わる。
- $y \ge 2$ **における翼**。$2 \le y \le \sqrt{5}$ のとき、解 $2 - \sqrt{D}$ は 2 から 0 まで減少する。$y = \sqrt{5}$ を超えるとこの解は負になるので、x^2 として正当な値ではない。解 $2 + \sqrt{D}$ は 2 から限りなく増加する。したがってこの枝は水平な接線をもつ $(0, \sqrt{5})$ から始まり、$(\sqrt{2}, 2)$ で極小まで下がり、その後上昇して上側から $y = x$ に近づく。

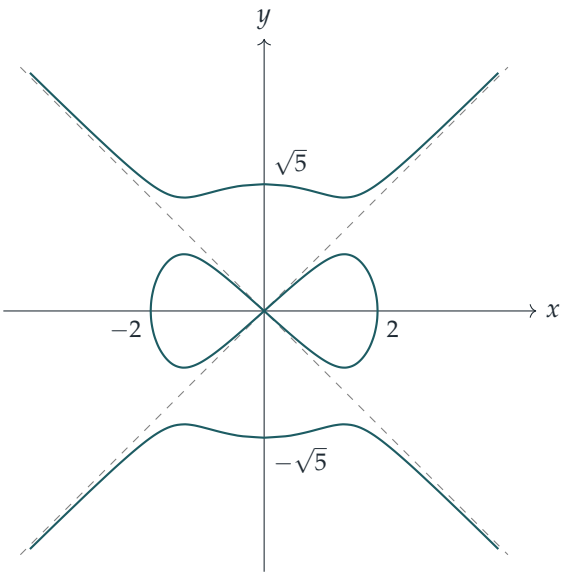


小問 (iii)

方程式には x^2 と y^2 しか含まれないので、曲線は y 軸に関して対称（x を $-x$ に置き換える）であり、x 軸に関しても対称（y を $-y$ に置き換える）である。第 1 象限の部分を両軸に関して折り返すと：

- ループは $x = -2$ と $x = 2$ の間にある、$|y| \le 1$ を満たす 8 の字（figure-of-eight）になる。その二つの輪は原点で直線 $y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x$ に沿って交差し、$(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ に停留点（turning point）をもつ。
- 翼は $y \ge 2$ の枝と $y \le -2$ の枝の二つになる。それぞれ $(0, \pm\sqrt{5})$ で極大または極小となり、$(\pm\sqrt{2}, \pm 2)$ に停留点をもつ。どちらも外側から漸近線 $y = \pm x$ に近づく。

曲線のどの部分も帯状の領域 $1 < |y| < 2$ には含まれない。



検算

- 図に記した各点は方程式を満たす。たとえば $(\sqrt{2}, 2)$ では両辺とも -4 に等しく、$(0, \sqrt{5})$ では両辺とも 0 に等しい。
- 点 $(1, 1.5)$ は禁止された帯状領域にある。そこでは左辺は $2.25 \times (-2.75) \approx -6.19$ であるが、右辺 $x^2(x^2-4)$ は決して -4 より小さくならない（$x^2 = 2$ で最小値をとる）。これは判別式による議論を小さな規模で確かめたものである。
- 翼の上の $y = 100$ では、公式から $x^2 = 2 + \sqrt{(10^4-1)(10^4-4)}$ が得られる。このとき $4x(y-x) \approx 1.0002$ となり、$y - x \approx \frac{1}{4x}$ と一致する。原点の近くでは、ループ上の比 y/x は $0.8944 \approx 2/\sqrt{5}$ に近づく。

よくある間違い

- $(0, 0)$ を接線が水平（あるいは垂直）になる点として挙げてしまう。そこでは $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は $0/0$ であり、本当の傾きは (b) から得られる。
- ループが $y = x$ に沿って原点を出ていくように描いたり、翼が $y = x$ と交わるように描いたりする。ループは傾き $2/\sqrt{5} < 1$ で出発し、翼は常に $y = x$ より厳密に上側にある。
- 条件 $x^2 \geq 0$ を忘れる。この条件により、内側の解は $y = \sqrt{5}$ で打ち切られる。

STEP のその先へ

悪魔の曲線は**代数曲線**（algebraic curve）、すなわち多項式 $F(x,y)$ の零点集合である。原点は**特異点**（singular point）であり、そこでは二つの偏導関数（partial derivative）F_x と F_y がともに 0 になる。F の最低次の項はそこでの接線を与え、これはまさに (b) で行ったことである。また、最高次の項は漸近線の方向を与える。大学では、これらの考え方は陰関数定理（implicit function theorem）や代数幾何学（algebraic geometry）の中で再び現れる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、STEP 形式の曲線の概形を描く問題が丁寧な解説とともにさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。