解答例

STEP III 2019、第 6 問

純粋数学 ・ 複素数平面上の円

STEP III 2019、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

冒頭の式は $|z-a|^2-r^2$ を姿を変えて書いたものにすぎないので、軌跡（locus）は a からの距離が r である点全体の集合である。$\omega=1/z$ による像（image）を求めるには、$z=1/\omega$ を代入して分母を払い、その結果をもとの方程式と**同じ**形に整理し直す。その形になれば、係数を比較するだけで中心と半径をそのまま読み取れる。あとは中心と半径を比べれば、C' と C が同じ円になるのはどのようなときかが決まる。

解答

$(z-a)^*=z^*-a^*$ であるから、

$$|z-a|^2=(z-a)(z^*-a^*)=zz^*-a^*z-az^*+aa^*,$$

したがって与えられた方程式は、ちょうど $|z-a|^2=r^2$、すなわち $|z-a|=r$ であることを表している（$r>0$ であるから）。ゆえに C は**中心** a、**半径** r の円である。

より一般に、$s>0$ のとき方程式 $ww^*-bw^*-b^*w+bb^*-s^2=0$ は中心 b、半径 s の円を表す。これをひな形として用いる。

小問 (i)

まず、$z=0$ は C 上にない。もしあれば $|a|=r$、すなわち $a^*a=r^2$ が必要になるが、これは除外されている。したがって $\omega=1/z$ は C のすべての点に対して定義され、$\omega\neq0$ である。また $z=1/\omega$ であるから、Q が C' 上にあるのは、$\omega\neq0$ かつ

$$\left|\frac{1}{\omega}-a\right|=r \iff |1-a\omega|=r|\omega| \iff (1-a\omega)(1-a^*\omega^*)=r^2\omega\omega^*.$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。展開して項を整理すると、

$$(a^*a - r^2)\,\omega\omega^* - a\omega - a^*\omega^* + 1 = 0.$$

$k = a^*a - r^2 = |a|^2 - r^2$ とおく。仮定より、これは0でない実数である。k で割ると、

$$\omega\omega^* - \frac{a^*}{k}\,\omega^* - \frac{a}{k}\,\omega + \frac{1}{k} = 0.$$

これはひな形において $b = a^*/k$（k は実数なので $b^* = a/k$）とした形に一致する。ただし $bb^* - s^2 = 1/k$、すなわち

$$s^2 = \frac{|a|^2}{k^2} - \frac{1}{k} = \frac{|a|^2 - k}{k^2} = \frac{r^2}{k^2}.$$

でなければならない。これは正であるから、C' は確かに円であり、

$$\text{中心}\frac{a^*}{|a|^2 - r^2}, \qquad \text{半径}\frac{r}{||a|^2 - r^2|}.$$

である。（$\omega = 0$ はこの方程式を満たさないことに注意する。満たすとすれば $1 = 0$ となってしまうからである。したがって、この円のすべての点は確かに C 上のある z に対する $1/z$ になっている。）

考えてみよう 2つの円が同じになるのは、ちょうど…のときか？

それは中心が同じで、かつ半径が同じであるときである。したがって $C' = C$ となるためには

$$\frac{r}{|k|} = r \qquad \text{かつ} \qquad \frac{a^*}{k} = a.$$

が必要である。1つ目の条件から $|k| = 1$、すなわち $k^2 = 1$ が得られる：

$$(|a|^2 - r^2)^2 = 1.$$

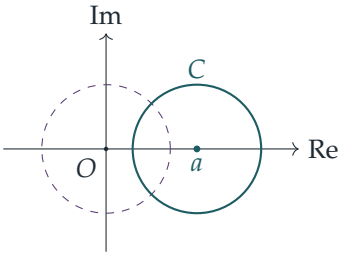
よって $k = 1$ または $k = -1$ であり、このとき2つ目の条件から次が得られる：

- $k = 1$ の場合：$a^* = a$ であるから、a は**実数**である。
- $k = -1$ の場合：$a^* = -a$ であるから、a は**虚数**（imaginary、すなわち純虚数）である。

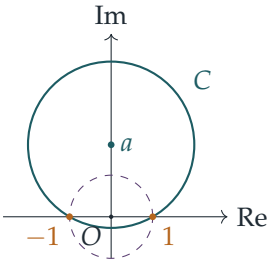
（$a = 0$ ならば両方に当てはまり、このとき $r = 1$ である。）逆に、これらのいずれかと半径の条件がそろえば、中心と半径は確かに一致する。

概形。 a が実数ならば $|a|^2 = r^2 + 1 > r^2$ であるから、中心は実軸上で O から距離 $\sqrt{r^2+1}$ の位置にあり、原点は C の**外側**にある。この円は実軸と $a - r$ と $a + r$ で交わり、その積は $a^2 - r^2 = 1$ である。$1/z$ はこの2点を入れ替えるので、当然そうなるはずである。a が虚数ならば $|a|^2 = r^2 - 1$ であるから、この場合は $r \geq 1$ が必要であ

る。中心は虚軸上にあり、原点は C の**内側**にある。$a = \mathrm{i}c$ と書くと、実軸との交点は $x^2 + c^2 = r^2$ を満たすから、$x = \pm 1$ である。どちらの場合も $|a|^2 = r^2 \pm 1$ であるから、C は単位円（unit circle、破線）と直交する（左図は $a = \sqrt{2}$、$r = 1$、右図は $a = \mathrm{i}\sqrt{3}$、$r = 2$ の場合である）。



a が実数



a が虚数

もちろん a が実数で負の場合もあり、そのときは左図を虚軸に関して折り返した図になる。同様に、虚数 a が実軸より下にあることもある。

小問 (ii)

今度は $z = 1/\omega^*$ であるから、Q が軌跡上にあるのは

$$\left|\frac{1}{\omega^*} - a\right| = r \iff |1 - a\omega^*| = r|\omega^*| \iff |1 - a^*\omega| = r|\omega|,$$

のとき、かつそのときに限る。ここで、1 つ目の絶対値（modulus）の中で共役（conjugate）をとった（複素数とその共役は絶対値が等しい）。これは小問 (i) の方程式で a を a^* に置き換えたものである。したがって小問 (i) より、軌跡は

$$\text{中心}\frac{a}{k}, \qquad \text{半径}\frac{r}{|k|}, \qquad k = |a|^2 - r^2.$$

の円である。これが C と一致するためには $|k| = 1$ かつ $a/k = a$ が必要である。$a \neq 0$ ならば、2 つ目の条件から $k = 1$ となり、条件はそれだけである。すなわち条件はちょうど

$$|a|^2 = r^2 + 1,$$

であり、これは a の偏角（argument）については何も述べていない。（$a = 0$ ならば、前と同様に $r = 1$ が必要である。）

? **考えてみよう** 実数でも虚数でもない具体的な a を見つけられるか？

$a = 1 + \mathrm{i}$、$r = 1$ とする。すると $|a|^2 = 2 = r^2 + 1$ であるから、Q の軌跡は C であるが、a は実数でも純虚数でもない。したがって答えは**否**である。a が実数または虚数でなければならない、ということはない。

検算

- $a = \sqrt{5}$、$r = 2$（したがって $|a|^2 - r^2 = 1$）のとき、C 上の点 $z = \sqrt{5} \pm 2$ は $1/(\sqrt{5} \pm 2) = \sqrt{5} \mp 2$ に移り、これらもまた C 上にある。
- 小問 (ii) で $a = 1 + \mathrm{i}$、$r = 1$ の場合：点 $z = 1$ は C 上にあり、$1/z^* = 1$ もそうである。点 $z = 2 + \mathrm{i}$ からは $1/z^* = (2 + \mathrm{i})/5 = 0.4 + 0.2\mathrm{i}$ が得られ、$|(0.4 + 0.2\mathrm{i}) - (1 + \mathrm{i})|^2 = 0.36 + 0.64 = 1$ である。しかし $1/z = 0.4 - 0.2\mathrm{i}$ は C 上にないので、この円は小問 (i) の写像では固定されない。
- 両方の小問における像の円は、ランダムな円の多数の点を写像し、予測した中心からの距離を測ることで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- C' の中心を $a^*/(|a|^2 - r^2)$ ではなく $a/(|a|^2 - r^2)$ と書いてしまう。中心を読み取るには、ω ではなく ω^* の係数を見る必要がある。
- 半径 $r/\left||a|^2 - r^2\right|$ の絶対値を書き忘れる。絶対値がないと、$|a| < r$ の場合に半径が負になってしまう。
- 小問 (ii) で、小問 (i) からの類推で「はい」と答えてしまい、共役によって条件 $a^* = \pm a$ が消えることに気づかない。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto 1/z^*$ は**単位円に関する反転**（inversion in the unit circle）であり、$z \mapsto 1/z$ はその反転のあとに実軸に関する折り返しを行ったものである。どちらもメビウス変換（Möbius transformation）の仲間であり、メビウス変換はつねに円と直線を円と直線に移す。小問 (ii) は、円が反転で固定されるのは、それが反転の円と直交するとき、すなわち $|a|^2 = r^2 + 1$ のとき（または単位円そのもののとき）に限る、という古典的な事実である。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した本）は、これらの考え方を図を交えて見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。