解答例

STEP III 2019、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

STEP III 2019、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) の関数は $[0,\infty)$ を $[0,1)$ の上へ滑らかかつ単調増加に写す。そこで、これを定数倍すれば、$[0,c)$ の一部の上での y についての積分を、$[0,\infty)$ の一部の上での x についての積分に変換できる。さらにこの置換（substitution）によって c^2-y^2 は姿を変えた完全平方となり、厄介な平方根が消える。根号が消えれば被積分関数（integrand）は有理式となり、注に与えられた逆正接（arctangent）の積分で処理できる。逆数置換（reciprocal substitution）$y=1/u$ によって、後半の積分は最初の積分に帰着される。

解答

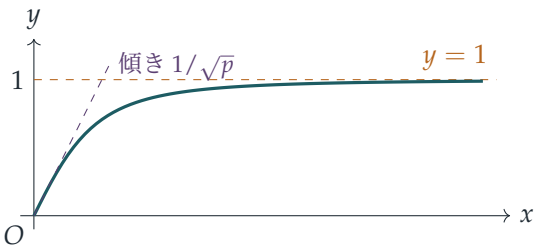
小問 (i)

$f(x)=x(x^2+p)^{-1/2}$、$p>0$ とすると、$f(0)=0$ であり、

$$f'(x)=(x^2+p)^{-1/2}-x^2(x^2+p)^{-3/2}=\frac{p}{(x^2+p)^{3/2}}>0,$$

$$f''(x)=-\frac{3px}{(x^2+p)^{5/2}}<0 \quad \text{ただし} x>0.$$

よって曲線は原点を傾き $1/\sqrt{p}$ で出発し、下に曲がりながら（すなわち上に凸、英語では凹（concave））単調に増加する。$x>0$ に対して $f(x)=1/\sqrt{1+p/x^2}$ であるから、$x\to\infty$ のとき $f(x)\to 1$ であり、その近づき方は下からである。したがって $y=1$ は曲線が決して到達しない漸近線（asymptote）である。



小問 (ii)

問題文に印刷された置換では分子が b になっている。これではうまくいかない。b^2-y^2 はきれいになるが、$c^2(x^2+p)-b^2x^2$ の平方根が残り、これは完全平方ではないからである。うまくいく置換（そして出題者が意図していたもの）は分子が c のものである：

$$y=\frac{cx}{\sqrt{x^2+p}},\qquad p>0.$$

小問 (i) より、これは $x\in[0,\infty)$ から $y\in[0,c)$ の上への増加写像であり、この範囲はちょうど $\sqrt{c^2-y^2}$ が定義される範囲である。このとき

$$\begin{aligned}c^2-y^2&=\frac{c^2(x^2+p)-c^2x^2}{x^2+p}=\frac{c^2p}{x^2+p},\\ b^2-y^2&=\frac{b^2p+(b^2-c^2)x^2}{x^2+p},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\quad\text{（小問 (i) より）}.\end{aligned}$$

$c>0$ かつ $p>0$ であるから、$\sqrt{c^2-y^2}=c\sqrt{p}/\sqrt{x^2+p}$ である。代入すると

$$I=\int\frac{x^2+p}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{c\sqrt{p}}\cdot\frac{cp}{(x^2+p)^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{p}}{b^2p+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$p=1$ と選べば

$$I=\int\frac{1}{b^2+(b^2-c^2)x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、これが求める結果である。置換は $y=cx/\sqrt{x^2+1}$ であり、その逆は $x=y/\sqrt{c^2-y^2}$ である。

第1の積分。$b=\sqrt{3}$、$c=\sqrt{2}$ とする。すると $x=y/\sqrt{2-y^2}$ であるから、$y=1$ のとき $x=1$ であり、$y\to\sqrt{2}$ のとき $x\to\infty$ となる。もとの被積分関数は $y=\sqrt{2}$ で $(2-y^2)^{-1/2}$ のように発散するが、これは積分可能である。置換後の積分は $[1,\infty)$ 上

の収束する広義積分（improper integral）となる：

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}y}{(3-y^2)\sqrt{2-y^2}} = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_1^{\infty}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

考えてみよう 新しい積分では、もとの積分の $3-y^2$ と $2-y^2$ の位置に $3y^2-1$ と $2y^2-1$ が現れている。y^2 と定数の役割を入れ替えるのはどのような置換だろうか。

第 2 の積分。 $u>0$ として $y=1/u$ とおくと、$\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/u^2$ である。このとき

$$3y^2-1=\frac{3-u^2}{u^2}, \qquad \sqrt{2y^2-1}=\frac{\sqrt{2-u^2}}{u},$$

であり、積分の端点 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $y=1$ はそれぞれ $u=\sqrt{2}$ と $u=1$ になる。よって

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{y\,\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{u}\cdot\frac{u^2}{3-u^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(3-u^2)\sqrt{2-u^2}}.$$

これはちょうど第 1 の積分であるから、その値も $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ である。

小問 (iii)

同じ逆数置換 $y=1/u$ により、被積分関数は $u/\left((3-u^2)\sqrt{2-u^2}\right)$ に変わる。余分な因子 u があるので、今度は $w=\sqrt{2-u^2}$ とおきたくなる。そうすれば $3-u^2=1+w^2$ となるからである。この二つの段階をまとめると、一つの置換になる：

$$w=\frac{\sqrt{2y^2-1}}{y}=\sqrt{2-\frac{1}{y^2}}, \qquad \text{よって} \qquad w^2=2-\frac{1}{y^2}, \quad 2w\,\mathrm{d}w=\frac{2}{y^3}\,\mathrm{d}y.$$

$y\in[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$ に対して、w は 0 から 1 まで増加する。また $\mathrm{d}y=wy^3\,\mathrm{d}w$、$\sqrt{2y^2-1}=wy$、$3y^2-1=y^2\left(3-\frac{1}{y^2}\right)=y^2(1+w^2)$ である。したがって

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{(3y^2-1)\sqrt{2y^2-1}} = \int_0^1 \frac{wy^3\,\mathrm{d}w}{y^2(1+w^2)\cdot wy} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \frac{\pi}{4}.$$

（$y=1/\sqrt{2}$ における特異点（singularity）も、やはり積分可能な型 $(2y^2-1)^{-1/2}$ にすぎず、この置換によって取り除かれる。）

これは姿を変えた小問 (ii) の方法である。$x=1/w$ とおくと $y=x/\sqrt{2(x^2-1)}$ となり、これは $c^2=\frac{1}{2}$、$p=-1$ とした一般の置換にほかならない。小問 (i) で p が負であることも許されていたのはこのためである。

検算

- $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$、$\pi/4 \approx 0.7854$ である。どちらの値も、端点の特異性をならすために三角関数による置換を行ったうえで、もとの積分を数値積分して確認した。
- 第1の積分の大きさの大まかな確認：$[1, \sqrt{2}]$ 上では $1 \le 3 - y^2 \le 2$ であるから、積分は $\int_1^{\sqrt{2}} (2 - y^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$ の $\frac{1}{2}$ 倍と1倍の間にある。よって範囲は0.39から0.79であり、0.6046は十分その内側にある。
- 小問 (ii) の等式を1点で確かめる：$b = \sqrt{3}$、$c = \sqrt{2}$、$x = 1$ とすると $y = 1$ である。被積分関数の値は $\frac{1}{2}$、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \sqrt{2}/2^{3/2} = \frac{1}{2}$ であり、その積は $\frac{1}{4} = 1/(3+1)$ となって、予想どおりである。

よくある間違い

- 印刷された b を含む置換にこだわって行き詰まること。取り除くべき平方根は $\sqrt{c^2 - y^2}$ なので、倍率は c でなければならない。
- 積分の端点の変換を誤ること。ここでは $y = \sqrt{2} = c$ は有限の x の値ではなく、$x = \infty$ に対応する。
- $\mathrm{d}y = -\mathrm{d}u/u^2$ の負号を落としたり、端点を入れ替えて戻すのを忘れたりすること。そうすると正の被積分関数に対して負の答えが出てしまう。

STEP のその先へ

ここで用いた置換は有理化置換（rationalising substitution）である。2次式の平方根を含む被積分関数を有理関数（rational function）に変え、あとは部分分数（partial fractions）や $\tan^{-1}$ で仕上げる。大学1年の解析学では、ここで用いた広義積分の背後にある理論を学ぶ。すなわち、積分区間が無限であったり被積分関数が有界でなかったりする積分がどのようなときに収束するのか、そしてそのような積分に対してもなぜ置換積分が成り立つのか、という理論である。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、その両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。