解答例

# STEP III 2019、第 4 問

純粋数学 • 解と係数の関係

> **STEP III 2019、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

交互に現れる符号は、まさにヴィエタの公式（Vieta's formulas）に現れる符号である。根 $r_1, \ldots, r_n$ をもつモニック多項式（monic polynomial）は $x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$ であり、ここで $e_k$ は根から $k$ 個を選んだ積すべての和である。したがって「反射的（reflexive）」とは、すべての $k$ について $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ が成り立つということにほかならない。小さい場合はいくつかの連立方程式に帰着し、根の平方和 $e_1^2 - 2e_2$ から (ii) の等式が得られる。$a_n = 0$ が導かれれば $x$ の因数をくくり出すことができ、多項式を次々にはがしていける。

## 解答

以下、$a_1, \ldots, a_n$ の $k$ 次基本対称式（elementary symmetric function）を $e_k$ と書く。ヴィエタの公式により、P が根 $a_1, \ldots, a_n$ をもつのは、ちょうど次が成り立つときである。

$$e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k \qquad \text{ただし} k = 1, 2, \ldots, n.$$

### 小問 (i)

**1 次の場合。** $\mathrm{P}(x) = x - a_1$ は根 $a_1$ をもつので、このような多項式はすべて反射的である。すなわち、任意の実数 $a$ に対して $\mathrm{P}(x) = x - a$ である。

**2 次の場合。** $a_1 + a_2 = a_1$ かつ $a_1 a_2 = a_2$ が必要である。前者から $a_2 = 0$ が得られ、すると後者は自動的に成り立つ。よって任意の実数 $a$ に対して $\mathrm{P}(x) = x^2 - ax = x(x - a)$ であり、その根 $a$ と 0 は確かに $a_1$ と $a_2$ である。

**3 次の場合**。次が必要である。

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1,$$
$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = a_2,$$
$$a_1a_2a_3 = a_3.$$

第 1 式から $a_3 = -a_2$ である。すると第 2 式は $a_1(a_2 + a_3) + a_2a_3 = a_2$、すなわち $-a_2^2 = a_2$ となるので、$a_2 = 0$ または $a_2 = -1$ である。

- $a_2 = 0$ ならば $a_3 = 0$ であり、第 3 式は $0 = 0$ となる。よって $a_1$ は任意であり、$\mathrm{P}(x) = x^3 - ax^2 = x^2(x - a)$ である。
- $a_2 = -1$ ならば $a_3 = 1$ であり、第 3 式から $-a_1 = 1$、すなわち $a_1 = -1$ である。これにより
$$\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1),$$
が得られ、その根 $-1, -1, 1$ は確かに $a_1, a_2, a_3$ である。

よって、次数が 3 以下の反射的多項式は次のとおりである。

$$x - a, \qquad x^2 - ax, \qquad x^3 - ax^2 \quad (a \in \mathbb{R}), \qquad \text{および} \qquad x^3 + x^2 - x - 1.$$

**小問 (ii)**

根の平方和は

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = e_1^2 - 2e_2,$$

である。$e_1$ を 2 乗すると、各 $a_i^2$ が 1 回ずつ、各積 $a_ia_j$（$i < j$）が 2 回ずつ現れるからである。反射的多項式では $e_1 = a_1$ かつ $e_2 = a_2$ なので

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_1^2 - 2a_2, \qquad \text{すなわち} \qquad 2a_2 = -a_2^2 - a_3^2 - \cdots - a_n^2,$$

となり、示すべき式が得られた。（これはすべての $n \geq 2$ について成り立つ。）

次に、$a_k$ がすべて整数で $a_n \neq 0$ であるとし、矛盾を導くために $n > 3$ と仮定する。$a_2^2$ を移項して平方完成すると

$$(a_2 + 1)^2 = 1 - \left(a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

**考えてみよう** 整数であるという条件は、この等式をどのように締めつけるだろうか？

左辺は 0 以上なので、$a_3^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$ である。しかし $a_n$ は 0 でない整数なので $a_n^2 \geq 1$ である。よってこの和はちょうど 1 であり、$a_n^2 = 1$ かつ他の項はすべて 0、すなわち

$a_3 = a_4 = \cdots = a_{n-1} = 0$ であり、さらに $a_2 = -1$ である。$n \geq 4$ なので列 $a_3, \ldots, a_{n-1}$ は空でなく、特に $a_3 = 0$ である。ここで最後のヴィエタの式は、根の積が $a_n$ であることを述べている。

$$a_n = e_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 0,$$

$a_3 = 0$ だからである。これは $a_n \neq 0$ に矛盾する。したがって $n \leq 3$ である。

### 小問 (iii)

**$x$ の因数を取り除く。** P が次数 $n \geq 2$ の反射的多項式で $a_n = 0$ であるとする。このとき $\mathrm{P}(x) = x\mathrm{Q}(x)$ と書ける。ただし

$$\mathrm{Q}(x) = x^{n-1} - a_1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}.$$

P の根は $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$（ただし $a_n = 0$）であり、因数 $x$ が根 0 を 1 つ担う。よって Q の根は残りの $a_1, \ldots, a_{n-1}$ であり、Q は同じ（整数）係数をもつ反射的多項式である。逆に、Q が係数 $a_1, \ldots, a_m$ をもつ次数 $m$ の反射的多項式ならば、$x\mathrm{Q}(x)$ は係数 $a_1, \ldots, a_m, 0$ と根 $a_1, \ldots, a_m, 0$ をもつので、これも反射的である。

**はがしていく。** 整数係数の任意の反射的多項式 P から始める。次数が 2 以上で最後の係数が 0 である限り、$x$ の因数を取り除いていく。この操作は $\mathrm{P}(x) = x^m \mathrm{R}(x)$ の形で止まる。ここで $m \geq 0$ であり、R は次数 $k$ の整数係数反射的多項式で、$k = 1$ であるか、最後の係数 $a_k$ が 0 でないかのいずれかである。

- $a_k \neq 0$ ならば、(ii) より $k \leq 3$ である（$k \leq 3$ のときは示すべきことはない）。(i) の一覧より、$k = 1$ のときは $a \neq 0$ である $x - a$ が得られ、$k = 2$ のときは最後の係数が常に 0 なので該当するものはなく、$k = 3$ のとき $a_3 \neq 0$ となるのは $x^3 + x^2 - x - 1$ のみである。
- $k = 1$ かつ $a_1 = 0$ ならば、$\mathrm{R}(x) = x$ である。

$\mathrm{R}(x) = x$ を $a = 0$ の場合の $x - a$ に含め、さらに上で示した逆の主張を用いて $x^m$ を掛けたものがすべて反射的であることを確かめると、整数係数の反射的多項式はちょうど次のものである。

$$x^m(x - a) \quad (m \geq 0,\ a \in \mathbb{Z}),$$
$$x^m(x^3 + x^2 - x - 1) = x^m(x+1)^2(x-1) \quad (m \geq 0).$$

## 検算

- $x^2(x+1)^2(x-1) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ は $a_1, \ldots, a_5 = -1, -1, 1, 0, 0$ と根 $-1, -1, 1, 0, 0$ をもつので、反射的である。(ii) の等式は $2(-1) = -(1 + 1 + 0 + 0)$ となり、確か

に成り立つ。

- $n \leq 7$ について、$\{-3, \ldots, 3\}$ に属する $a_1, \ldots, a_n$ のすべての整数の選び方をコンピュータで探索したところ、上に挙げたもの以外の反射的多項式は見つからなかった。また $n = 2, 3$ について小さな有理数の範囲で探索し、(i) の一覧が正しいことが確認された。

## よくある間違い

- 自由なパラメータを含む族を見落とすこと。$x^2 - ax$ と $x^3 - ax^2$ は、特別な値に限らず、すべての実数 $a$ について反射的である。
- (ii) で $a_n = \pm 1$、$a_2 = -1$ を求めたところで止まってしまうこと。矛盾は根の積から生じる。$n \geq 4$ のとき $a_3, \ldots, a_{n-1}$ のいずれかが 0 になるので、根の積は 0 になるのである。
- (iii) で「$a_n = 0$ なので $x$ で割る」と述べるだけで、商が再び反射的であることを確かめないこと。0 である根の 1 つが因数 $x$ に対応し、残りの根が残りの係数と一致するのである。

## STEP のその先へ

方程式 $e_k(a_1, \ldots, a_n) = a_k$ は、解全体が代数多様体（algebraic variety）をなす多項式系の小さな例であり、ここでは解全体は直線と孤立点の和集合になっている。「平方和 $= e_1^2 - 2e_2$」という事実はニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）の最初のものである。ニュートンの恒等式は根のべき和と係数を結びつけるもので、対称式の理論の基礎をなしている。「平方数である整数の和が 1 以下」という一歩は、ディオファントス的（Diophantine）な議論によく見られる典型的な手法である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）と Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は、これらの考え方をさらに探究するのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。