解答例

STEP III 2019、第 3 問

純粋数学 • 行列の不変直線

> **STEP III 2019、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

点 (x, y) が不変点（invariant point）であるのは、$(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ によってそれが零に移されるとき、かつそのときに限る。ここから二つの一次方程式が得られる。小問 (i) と (ii) の内容はすべて、この二つの方程式がどのようなときに同じ直線を表すかを問うことから出てくる。その条件は $(a-1)(d-1) = bc$ であり、これは $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$ を意味する。小問 (iii) では、直線上の一般の点を変換に代入し、係数を比較する（compare coefficients）。

解答

小問 (i)

点 (x, y) が不変であるのは $ax + by = x$ かつ $cx + dy = y$ のとき、すなわち

$$(a-1)x = -by, \tag{1}$$
$$(d-1)y = -cx. \tag{2}$$

のときである。(1) と (2) を辺々掛け合わせると $(a-1)(d-1)xy = bc\,xy$ となるので、

$$((a-1)(d-1) - bc)xy = 0$$

が成り立つ。ここで (x, y) は L_1 の任意の点であり、これで示すべきことが示された。

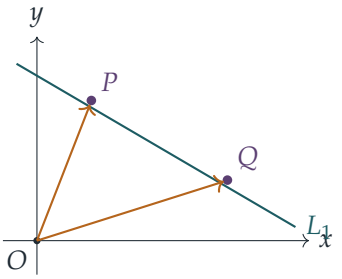
二つ目の結果を示す。L_1 上に $xy \neq 0$ となる点があれば、xy で割ることができる。そこでそのような点を探す。

考えてみよう L_1 のどの点も $x=0$ または $y=0$ を満たすとしたらどうなるか？

集合 $xy=0$ は二本の座標軸そのものである。両軸の和集合に含まれる直線はそのどちらかでなければならないので、L_1 が座標軸でない限り、それは $xy\neq 0$ となる点を含む。このとき xy で割れば $(a-1)(d-1)=bc$ が得られる。

残るは座標軸の場合である。L_1 が y 軸ならば、すべての $(0,y)$ が不変であり、(1) と (2) から、すべての y について $by=0$ かつ $(d-1)y=0$ となる。よって $b=0$ かつ $d=1$ であり、$(a-1)(d-1)=bc$ の両辺はともに 0 となる。L_1 が x 軸ならば、同様に $c=0$ かつ $a=1$ であり、やはり両辺は 0 である。したがって、いずれの場合も $(a-1)(d-1)=bc$ が成り立つ。

次に、L_1 が原点を通らないとする。相異なる 2 点 P, Q を L_1 上にとり、その位置ベクトル（position vector）をそれぞれ $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ とする。



O, P, Q は同一直線上にないので、$\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ は平行でなく、任意のベクトルは $\mathbf{v}=\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}$ と表せる。線形性（linearity）により

$$\mathbf{Av}=\lambda\mathbf{Ap}+\mu\mathbf{Aq}=\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}=\mathbf{v},$$

となるので、平面上のすべての点が不変であり、$\mathbf{A}=\mathbf{I}$ である。（このとき $a=d=1$ かつ $b=c=0$ であり、これは $(a-1)(d-1)=bc$ と合致する。）

小問 (ii)

$(a-1)(d-1)=bc$ と仮定する。(1) と (2) がともに成り立つ直線を見つければよい。

$b\neq 0$ の場合。直線 $(a-1)x+by=0$ をとる。$b\neq 0$ なので、これは原点を通るれっきとした直線である。その上のすべての点は (1) を満たす。この直線上では $y=-\frac{(a-1)x}{b}$ なので

$$cx+(d-1)y=cx-\frac{(a-1)(d-1)}{b}x=cx-\frac{bc}{b}x=0,$$

となり、(2) も成り立つ。よって $(a-1)x+by=0$ は不変点からなる直線である。

$b = 0$ **の場合**。このとき条件は $(a-1)(d-1) = 0$ となるので、$a = 1$ または $d = 1$ である。

- $a \neq 1$ ならば $d = 1$ である。方程式 (1) は $(a-1)x = 0$ となるので $x = 0$ であり、(2) は $cx = 0$ となるが、これは $x = 0$ のとき成り立つ。不変点からなる直線は y 軸 $x = 0$ である。
- $a = 1$ ならば (1) はすべての点で成り立つので、(2)：$cx + (d-1)y = 0$ だけを考えればよい。
  - c と $d-1$ がともに零ではないならば、これは原点を通る直線であり、不変点からなる直線である。
  - $c = 0$ かつ $d = 1$ ならば $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ であり、すべての点が不変で、すべての直線が不変点からなる直線となる。

したがって、$(a-1)(d-1) = bc$ のときは常に不変点からなる直線が存在する。

小問 (iii)

L_2 は原点を通らないので、L_2 を $y = mx + k$（ただし $k \neq 0$）と表す。L_2 上の一般の点は $(x, mx+k)$ であり、その像は

$$(X, Y) = \big((a+bm)x + bk,\ (c+dm)x + dk\big).$$

である。この直線が不変直線（invariant line）であるのは、すべての実数 x について $Y = mX + k$ となるとき、かつそのときに限る：

$$(c+dm)x + dk = m(a+bm)x + mbk + k.$$

両辺は x の一次式であり、すべての x で一致するので、係数が等しくなければならない：

$$\text{定数項：}\quad dk = mbk + k, \tag{3}$$

$$\text{変数の係数}x\text{：}\quad c + dm = am + bm^2. \tag{4}$$

考えてみよう L_2 が原点を通らないという事実はどこで使うか？

それは (3) で使う。$k \neq 0$ なので k で割ることができ、$d - 1 = mb$ が得られる。$d = 1 + mb$ を (4) に代入すると

$$c = am + bm^2 - dm = am + bm^2 - m - bm^2 = m(a-1).$$

となる。したがって

$$bc = bm(a-1) = (d-1)(a-1),$$

であり、これが示すべき結果である。（$k = 0$ のときは式 (3) から何も得られない。原点を通る直線がこの条件なしに不変となりうるのはこのためである。例として角 π の回転（rotation）がある。これは O を通るすべての直線をそれ自身に移すが、$(a-1)(d-1) = 4 \neq 0 = bc$ である。）

検算

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を試す。ここで $(a-1)(d-1) = -2 = bc$ である。小問 (ii) からは不変直線 $2x + 2y = 0$、すなわち $y = -x$ が予想され、実際 $\mathbf{A}(1,-1)^{\mathrm{T}} = (1,-1)^{\mathrm{T}}$ である。
- 小問 (iii) について、$m = 2, k = 1, a = 3, b = 1$ とする。すると $d = 1 + mb = 3$, $c = m(a-1) = 4$ である。点 $(1,3)$ は $y = 2x + 1$ 上にあり、$(6,13)$ に移る。そして $13 = 2 \times 6 + 1$ である。また $(a-1)(d-1) = 4 = bc$ である。
- 数千個のランダムな行列について計算機で確認した。見つかった不変直線 $y = mx + k$（$k \neq 0$）はすべて $d - 1 = mb$, $c = m(a-1)$, $(a-1)(d-1) = bc$ を満たし、原点を通らない不動点（fixed point）の直線はすべて $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ から生じていた。

よくある間違い

- 小問 (i) で、xy で割る際に L_1 が座標軸である場合を処理しない。
- 小問 (ii) の $b = 0$ の場合に場合分けの一部を見落とす。特に、すべての直線が条件を満たす $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ の場合を落としやすい。
- 小問 (iii) で、**不変直線**（点が直線上にとどまる）と**不変点からなる直線**（点が動かない）を混同し、$X = x$ とおいてしまう。

STEP のその先へ

条件 $(a-1)(d-1) = bc$ は $\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$ のことであり、これは 1 が $\mathbf{A}$ の固有値（eigenvalue）であることを意味する。このとき、原点を通る不変点からなる直線は、その固有値に対する固有空間（eigenspace）である。小問 (iii) は、原点を通らない不変直線もまた固有値 1 を強制することを示している。関係式 $c = m(a-1)$ と $d - 1 = mb$ は、$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ の第 2 行が第 1 行の m 倍であることを表している。したがって $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ の階数（rank）は高々 1 であり、すべての点を L_2 に平行に動かす。固有値、固有ベクトル（eigenvector）、線形写像の幾何については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形

代数入門）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。