解答例

STEP III 2019、第 2 問

純粋数学 • 関数方程式

STEP III 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.8 節「**加法定理から関数を決める**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/addition-laws.html

鍵となる考え方

関数方程式（functional equation）は、関数が 1 点の近くでどう振る舞うかさえわかれば、その関数のすべてを教えてくれる。$x = y = 0$ を代入すると 0 での値が定まる。次に、一般の x における差分商（difference quotient）を書き、関数方程式を用いると、それは0 **における**差分商に変わる。そこでの極限が k であることはわかっている。こうして微分方程式（differential equation）が得られ、先に求めた初期値のもとでそれを解けばよい。

解答

小問 (i)

0 **における値**。関数方程式に $x = y = 0$ を代入すると $f(0) = f(0)^2$ となるから、$f(0) = 0$ または $f(0) = 1$ である。

$f(0) = 0$ と仮定する。このとき $y = 0$ を代入すると、すべての x に対して $f(x) = f(x)f(0) = 0$ となるので、f は恒等的に零である関数となり、$f'(0) = 0$ である。これは $f'(0) = k \neq 0$ に矛盾する。よって $f(0) = 1$ である。

導関数。 $(*)$ と、$y=h$ とした関数方程式から、

$$\mathrm{f}'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(h)-\mathrm{f}(x)}{h}=\mathrm{f}(x)\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{f}(h)-1}{h}.$$

$\mathrm{f}(0)=1$ であるから、最後の極限は $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\mathrm{f}(0+h)-\mathrm{f}(0)}{h}$ であり、これは $x=0$ における $(*)$ により $\mathrm{f}'(0)=k$ に等しい。よって

$$\mathrm{f}'(x)=k\,\mathrm{f}(x),$$

となり、示すべきことが示された。($\mathrm{f}(x)$ は h に依存しないので、極限の外に出すことができた。)

解く。 f で割る（それには $\mathrm{f}\neq0$ が必要である）代わりに、$u(x)=\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{f}(x)$ を考える。すると

$$u'(x)=\mathrm{e}^{-kx}\big(\mathrm{f}'(x)-k\,\mathrm{f}(x)\big)=0,$$

となるから、u は定数であり、その値は $u(0)=\mathrm{f}(0)=1$ である。したがって

$$\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{kx}.$$

これは確かにすべての条件を満たす。実際、$\mathrm{e}^{k(x+y)}=\mathrm{e}^{kx}\mathrm{e}^{ky}$ であり、0 における導関数は k である。

小問 (ii)

0 における値。 $x=y=0$ を代入すると

$$\mathrm{g}(0)=\frac{2\mathrm{g}(0)}{1+\mathrm{g}(0)^2}\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{g}(0)\big(\mathrm{g}(0)^2-1\big)=0,$$

となるから、$\mathrm{g}(0)\in\{0,1,-1\}$ である。すべての x に対して $|\mathrm{g}(x)|<1$ であるから、$\mathrm{g}(0)=0$ でなければならない。また、$|\mathrm{g}|<1$ により $1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y)>0$ が保証されるので、関数方程式において零で割ることは決して起こらないことにも注意しておく。

差分商。 $y=h$ とした関数方程式を用い、全体を 1 つの分母にまとめると、

$$\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(h)-\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(x)^2\mathrm{g}(h)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}=\frac{\mathrm{g}(h)\big(1-\mathrm{g}(x)^2\big)}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

h で割ると、

$$\frac{\mathrm{g}(x+h)-\mathrm{g}(x)}{h}=\big(1-\mathrm{g}(x)^2\big)\cdot\frac{\mathrm{g}(h)}{h}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(h)}.$$

考えてみよう $h\to0$ のとき、右辺の各因数はどうなるか？

第 1 の因数は h を含まない。$\mathrm{g}(0)=0$ であるから、真ん中の因数は $\dfrac{\mathrm{g}(0+h)-\mathrm{g}(0)}{h}$ であり、これは $\mathrm{g}'(0)=k$ に収束する。最後の因数については $\mathrm{g}(h)\to\mathrm{g}(0)=0$ が必要である。これは、g が 0 で微分可能であり、したがって連続であることから成り立つ。よって最後の因数は 1 に収束し、

$$\mathrm{g}'(x)=k\bigl(1-\mathrm{g}(x)^2\bigr).$$

解く。$|\mathrm{g}(x)|<1$ であるから、因数 $1-\mathrm{g}(x)^2$ は決して零にならず、変数分離（separation of variables）ができる：

$$\int\frac{\mathrm{d}g}{1-g^2}=\int k\,\mathrm{d}x.$$

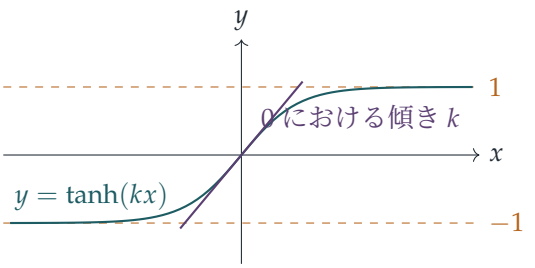
部分分数分解（partial fractions）により $\dfrac{1}{1-g^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+g}+\dfrac{1}{1-g}\right)$ であり、$1\pm g$ はどちらも正であるから、

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+\mathrm{g}(x)}{1-\mathrm{g}(x)}=kx+c.$$

$x=0$ において左辺は $\frac{1}{2}\ln 1=0$ であるから、$c=0$ である。よって $\dfrac{1+g}{1-g}=\mathrm{e}^{2kx}$ であり、これを g について解くと、

$$\mathrm{g}(x)=\frac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}=\tanh(kx).$$

これは確かに条件を満たす。$|\tanh(kx)|<1$ であり、加法定理 $\tanh(a+b)=\dfrac{\tanh a+\tanh b}{1+\tanh a\tanh b}$ はまさに関数方程式そのものであり、$\tanh(kx)$ の 0 における導関数は k である。



検算

- (i) において $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{kx}$ で $k=1$、$x=0.3$、$y=0.5$ とすると：$\mathrm{e}^{0.3}\mathrm{e}^{0.5}=1.3499\times 1.6487=2.2255=\mathrm{e}^{0.8}$。
- (ii) において $k=1$、$x=0.3$、$y=0.5$ とすると：$\tanh 0.3=0.29131$、$\tanh 0.5=0.46212$ であり、$(0.29131+0.46212)/(1+0.29131\times 0.46212)=0.66404=\tanh 0.8$ となる。

- どちらの答えも、導関数の関係式 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$ と $\mathrm{g}' = k(1-\mathrm{g}^2)$ を含めて、多数のランダムな k、x、y についてコンピュータでも確認した。
- 2つの小問はつながっている：$\tanh(kx) = \dfrac{\mathrm{e}^{2kx}-1}{\mathrm{e}^{2kx}+1}$ は、小問 (i) の指数関数で k を $2k$ に置き換えたものから作られている。

よくある間違い

- 理由を示さずに $\mathrm{f}(0) = 0$ や $\mathrm{g}(0) = \pm 1$ を捨ててしまう。条件 $k \neq 0$ と $|\mathrm{g}| < 1$ は、まさにこれらを除外するために置かれている。
- 理由を述べずに分母の中で $\mathrm{g}(h) \to 0$ としてしまう。これには g の 0 における連続性が必要であり、それは微分可能性から従う。
- f や $1-\mathrm{g}^2$ が零でないことを確かめずに、それで割ってしまう。

STEP のその先へ

これらは**コーシー（*Cauchy*）型の関数方程式**（Cauchy-type functional equations）の例である。解析学の最初の講義では、指数型の方程式 $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ が、微分可能性よりはるかに弱い仮定（たとえば1点での連続性）のもとで $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{kx}$（または $\mathrm{f} \equiv 0$）を強制することを学ぶ。一方、正則性の仮定がまったくなければ、奇妙な解が存在する。tanh の方程式は特殊相対性理論（special relativity）における速度の加法則であり、そこでは速度の $\tanh^{-1}$（ラピディティ（rapidity））が単純に足し合わされる。この背後にある解析学については、Abbott の *Understanding Analysis* を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。