解答例

STEP III 2019、第 10 問

力学 ・ 斜め衝突

STEP III 2019、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

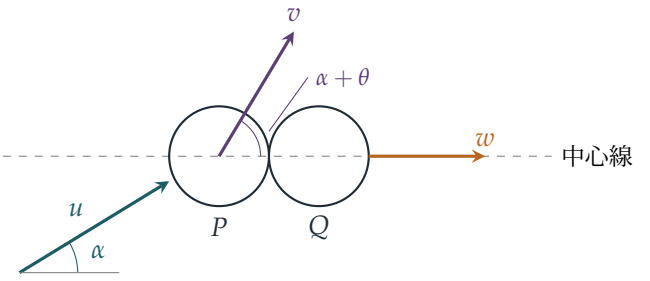
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての速度を、中心線（line of centres）に沿った成分と、それに垂直な成分とに分解する。球はなめらか（smooth）なので、撃力（impulse）は中心線に沿ってのみはたらく。したがって P の垂直成分は変化せず、Q はその線に沿って動き出す。そうすれば、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発法則（Newton's experimental law）を、1 次元の衝突とまったく同じように中心線に沿って適用できる。あとは三角関数の計算である。

解答

P と Q を、なめらかな水平面上にある等しい質量 m のなめらかな球としてモデル化する。衝突の瞬間の中心線を x 方向とし、P から Q へ向かう向きを正とする。y 方向は運動平面内でこれに垂直にとり、P の初速度がある側を正とする。



小問 (i)

衝突前、P の速度は中心線に沿った成分 $u\cos\alpha$ と、それに垂直な成分 $u\sin\alpha$ をもつ。

なめらかな球どうしの接触力は中心線に沿ってはたらく。よってその線に垂直な方向には P に撃力がはたらかず、P の垂直成分は変化しない。また、Q ははじめ静止しており、中心線に沿った撃力しか受けないので、速さ w でその線に沿って動き出す。

考えてみよう P の新しい向きが中心線となす角が $\alpha-\theta$ ではなく $\alpha+\theta$ になるのはなぜか。

P にはたらく撃力は中心線に沿って後ろ向きである。これは P の x 成分を $u\cos\alpha$ から後で求める値 v_x へと減らし、y 成分には影響しない。したがって速度は中心線から離れる向きに回転し、中心線となす角は α から $\alpha+\theta$ へと大きくなる。$e<1$ のとき $v_x>0$ であることを後で確かめるので、$0<\alpha+\theta<\frac{\pi}{2}$ である。

衝突後、P の速度は中心線に沿った成分 $v\cos(\alpha+\theta)$ と、それに垂直な成分 $v\sin(\alpha+\theta)$ をもつ。垂直成分を等しいとおくと

$$u\sin\alpha = v\sin(\alpha+\theta),$$

となり、題意が示された。

中心線に沿っては、運動量保存則（質量が等しいので m を約分する）により

$$u\cos\alpha = v\cos(\alpha+\theta)+w. \tag{1}$$

最初の結果から $u=v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned} w &= \frac{v\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) \\ &= \frac{v\left[\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\theta)\sin\alpha\right]}{\sin\alpha} = \frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}, \end{aligned}$$

となる。ここで $\sin\big((\alpha+\theta)-\alpha\big)$ の展開を用いた。よって

$$w=\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha}.$$

これにはうまい解釈がある。ベクトルとしての運動量保存則は $\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{w}$ を意味し、これを $\mathbf{u}$ に垂直な方向に分解すると $0=v\sin\theta-w\sin\alpha$ が得られる。

小問 (ii)

中心線に沿ったニュートンの反発法則によれば、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$w-v\cos(\alpha+\theta)=e\,u\cos\alpha. \tag{2}$$

小問 (i) から $w = v\sin\theta/\sin\alpha$ と $u = v\sin(\alpha+\theta)/\sin\alpha$ を代入すると

$$\frac{v\sin\theta}{\sin\alpha} - v\cos(\alpha+\theta) = \frac{ev\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

両辺に $\sin\alpha/v$ を掛け（$v>0$ かつ $\sin\alpha\neq 0$ なので許される）、整理すると

$$\sin\theta = \cos(\theta+\alpha)\sin\alpha + e\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha,$$

となり、題意が示された。

$\tan\theta$ を求めるために、加法定理（compound angle formulae）で両方を展開する：

$$\sin\theta = (\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)\sin\alpha + e(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha)\cos\alpha.$$

$\sin\theta$ を含む項を左辺に集めると

$$\sin\theta\left(1+\sin^2\alpha - e\cos^2\alpha\right) = (1+e)\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha.$$

$\cos\theta\cos^2\alpha$ で割り、$t=\tan\alpha$ とおいて $1/\cos^2\alpha = 1+t^2$ を用いると

$$\tan\theta\left(1+t^2+t^2-e\right) = (1+e)\,t, \qquad \text{よって} \qquad \tan\theta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}.$$

$e<1$ より分母は正なので $\tan\theta>0$ であり、θ は確かに鋭角の偏向である。

$\tan\theta$ の最大値

α が鋭角全体を動くとき、$t=\tan\alpha$ は $(0,\infty)$ のすべての値をとる。$t>0$ なので分子と分母を t で割ることができる：

$$\tan\theta = \frac{1+e}{\dfrac{1-e}{t}+2t}.$$

考えてみよう 微分を使わずにこれを最大にするにはどうすればよいか。

分母をできるだけ小さくすればよい。$(1-e)/t$ と $2t$ はともに正なので、相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により

$$\frac{1-e}{t}+2t \geq 2\sqrt{\frac{1-e}{t}\cdot 2t} = 2\sqrt{2(1-e)},$$

であり、等号は $(1-e)/t = 2t$、すなわち $\tan\alpha = \sqrt{(1-e)/2}$ のときに限り成り立つ。これは実際に存在する鋭角なので、最小値は達成される。したがって $\tan\theta$ の最大値は

$$\tan\theta_{\max} = \frac{1+e}{2\sqrt{2(1-e)}}.$$

である。（t で微分しても同じ停留点（stationary point）$2t^2 = 1-e$ が得られる。）

検算

- 弾性衝突に近い極限 $e \to 1$：2 球は中心線に沿った成分を交換するので、P には $u\sin\alpha$ だけが残り、中心線に垂直に動く。このとき $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ であり、$\tan\theta = \cot\alpha$ となる。公式からは $\tan\theta = 2t/(2t^2) = 1/t$ が得られ、一致する。$\alpha \to 0$ のとき $\theta \to \frac{\pi}{2}$ となるので、最大値が発散するのも当然である。
- $e = \frac{1}{2}$ のとき最大値は $\frac{3/2}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$ で、$\tan\alpha = \frac{1}{2}$（約 26.6°）で達成される。α を細かく変えて調べると、確かに 0.75 となる。多数のランダムな衝突をコンピュータでシミュレーションしても、問題の 4 つの結果がすべて再現された。
- α が小さい場合（ほぼ正面衝突）：$\tan\theta \approx \frac{1+e}{1-e}\alpha \to 0$ なので、正面衝突では予想どおり偏向が生じない。

よくある間違い

- ニュートンの反発法則を、中心線に沿った成分ではなく速さそのものに適用してしまう。反発は撃力の方向にのみはたらく。
- P の新しい角を $\alpha - \theta$ と書いてしまう。撃力は中心線に沿った成分の一部を取り去るので、P はその線から離れる向きに曲がる。
- $1 - e + 2\tan^2\alpha$ が正になるのは $e < 1$ のおかげであること、また $\tan\alpha$ が $(0, \infty)$ 全体を動くので相加相乗平均の等号成立の場合が実際に達成されることを見落とす。

STEP のその先へ

なめらかな球の斜め衝突（oblique collision）は、散乱（scattering）の最も単純な例である。この問題では同じ 2 つの保存則を、ある線に沿った方向とそれを横切る方向に適用したが、この考え方は素粒子物理学や気体分子運動論（kinetic theory of gases）にまで拡張される。等しい質量どうしの弾性衝突では、衝突後の速度どうしが有名な直角をなすという結果になる。重心系（centre-of-mass frame）では、どの衝突も相対速度を回転させる（この問題ではさらに縮める）だけであり、これらの結果をすべて見通すより鮮やかな方法となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この視点から衝突を論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。