解答例

STEP III 2019、第 1 問

純粋数学 ・ 連立微分方程式

> **STEP III 2019、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

$k = 1$ のとき、右辺はちょうど $x + \mathrm{i}y$ に複素定数を掛けて得られるものになっているので、2 つの方程式は $z = x + \mathrm{i}y$ についての 1 つの方程式 $\dot{z} = cz$ にまとまる。これにより、運動は回転と指数関数的減衰（exponential decay）の組み合わせ、すなわち螺旋（spiral）になる。$k = 0$ のときは、結合が一方向にしか働かない。x は y に依存しないので、まず x を求め、それを y の方程式に代入すればよい。

解答

小問 (i)

$k = 1$ のとき、$\dot{x} = -x - y$ かつ $\dot{y} = x - y$ である。$z = x + \mathrm{i}y$ とおく。すると

$$\begin{aligned}\dot{z} = \dot{x} + \mathrm{i}\dot{y} &= (-x - y) + \mathrm{i}(x - y) \\ &= (-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = (-1 + \mathrm{i})z,\end{aligned}$$

となる。これは $(-1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = -x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x - y$ と展開すれば確かめられる。$z(0) = 1$ より、解は

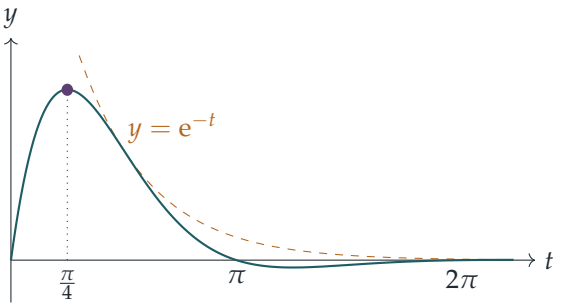
$$z = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \mathrm{e}^{-t}(\cos t + \mathrm{i}\sin t),$$

であるから、

$$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t, \qquad y = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

（複素数（complex numbers）を避けたい場合は、1 つ目の方程式を微分して y を消去すると $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$ が得られ、その特性方程式の根（auxiliary roots）は $-1 \pm \mathrm{i}$ である。あとは $x(0) = 1$、$\dot{x}(0) = -1$ を用いればよい。）

t に対する y のグラフ。これは包絡線（envelope）$\pm e^{-t}$ の内側にある正弦波であり、減衰振動（damped oscillation）である。$t = n\pi$ で 0 となり、停留点（turning points）は $\dot{y} = x - y = e^{-t}(\cos t - \sin t) = 0$ となるところ、すなわち $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$ である。山が 1 つ進むごとに高さは $e^{-\pi} \approx 0.04$ 倍になるので、正しい縮尺では最初の山のあとの振動はほとんど見えない。



軌道。極形式（polar form）で書くと、$z = e^{-t}e^{it}$ の絶対値（modulus）は $r = e^{-t}$、偏角（argument）は $\theta = t$ である。したがって軌道は螺旋

$$r = e^{-\theta}, \qquad \theta \geq 0,$$

であり、$(1, 0)$ から出発して反時計回りに巻きながら原点に近づき、$t \to \infty$ の極限で初めて原点に到達する。出発時には $\dot{x} = -1$ かつ $\dot{y} = 1$ なので、$(1, 0)$ から左上に向かって動き出す。1 周するごとに原点からの距離は $e^{-2\pi} \approx 0.002$ 倍に縮むので、正しい縮尺では最初の 1 周しか見えない。

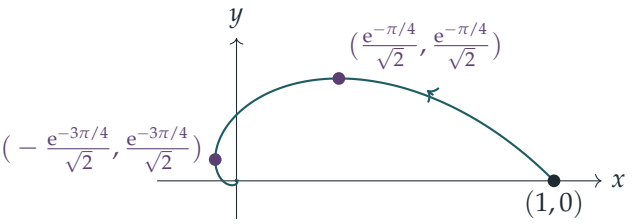
y の最大値。y の停留点は $t = \frac{\pi}{4} + n\pi$ である。$t = \frac{\pi}{4}$ では $y = e^{-\pi/4}/\sqrt{2} > 0$ となる。$t \geq \frac{\pi}{2}$ を満たすすべての t に対して $y \leq e^{-t} \leq e^{-\pi/2}$ であり、さらに $e^{-\pi/2} < e^{-\pi/4}/\sqrt{2}$ が成り立つ。これは $\sqrt{2} < e^{\pi/4} \approx 2.19$ と同値だからである。区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ における停留点は $t = \frac{\pi}{4}$ のみである。よって y が最大となる点は

$$\left(\frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-\pi/4}}{\sqrt{2}} \right) \approx (0.322,\ 0.322).$$

x の最小値。今度は $\dot{x} = -x - y = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$ であり、これは $\tan t = -1$、すなわち $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ のとき 0 になる。$x < 0$ となるには $\cos t < 0$ が必要で、これにより $t = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ が選ばれ、そのとき $x = -e^{-t}/\sqrt{2}$ となる。e^{-t} は減少関数なので、これが最も小さくなるのはそのような t のうち最小のもの、すなわち $t = \frac{3\pi}{4}$ のときである。（$x(0) = 1 > 0$ であり、$t \to \infty$ のとき $x \to 0$ となるから、最小値はこれらの停留点のいずれかでとられる。）よって x が最小となる点は

$$\left(-\frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-3\pi/4}}{\sqrt{2}} \right) \approx (-0.067,\ 0.067).$$

予想どおり、どちらの点も直線 $y = \pm x$ 上にある。螺旋上では、y が最大になるのは軌道が x 軸方向に進んでいるところであり、x が最小になるのは y 軸方向に進んでいるところである。



小問 (ii)

$k = 0$ のとき、1つ目の方程式は単独で $\dot{x} = -x$ となるので、$x(0) = 1$ より

$$x = e^{-t}.$$

すると $\dot{y} + y = e^{-t}$ となる。積分因子（integrating factor）e^t を掛けると $\frac{d}{dt}(ye^t) = 1$ となるので $ye^t = t + c$ であり、$y(0) = 0$ より $c = 0$ である：

$$y = te^{-t}.$$

考えてみよう これをどのようにして軌道の方程式に直せばよいだろうか？

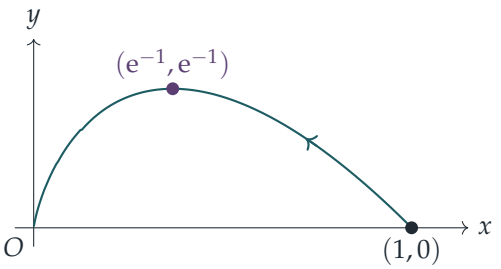
t を消去する。$x = e^{-t}$ より $t = -\ln x$ であるから、

$$y = -x \ln x, \qquad 0 < x \leq 1.$$

t が 0 から ∞ まで動くとき、x は 1 から 0 に向かって減少するので、粒子は $(1,0)$ を出発してこの曲線に沿って左へ進み、$t \to \infty$ のとき原点に近づく。

概形を描くための特徴は次のとおりである。

- $\frac{dy}{dx} = -\ln x - 1$ であり、これは $x = e^{-1}$ で 0 になる。よって最も高い点は (e^{-1}, e^{-1}) であり、$t = 1$ のときに到達する。
- $(1,0)$ における傾きは -1 であり、$t = 0$ における $\dot{x} = -1$、$\dot{y} = 1$ と一致する。
- $x \to 0^+$ のとき $x \ln x \to 0$ なので $y \to 0$ となる。しかし傾きは $-\ln x - 1 \to +\infty$ となるので、曲線は y 軸に接しながら原点に入っていく。
- $0 < x < 1$ において $y > 0$ であるから、軌道全体は x 軸より上にある。



小問 (i) との違いに注目しよう。$k = 0$ ではもはや回転がないので、粒子は一度も座標軸を横切らない。ただ曲がりながら原点に入っていくだけである。

検算

- 代入して確かめる：$x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$ に対して $\dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -x - y$ となり、確かに成り立つ。$\dot{y}$ も同様である。また、どちらの解も $x(0) = 1$、$y(0) = 0$ を満たす。
- 方程式を小さな時間刻みで数値的に進めていくと両方の解が再現され、小問 (i) における y の最大値が $t \approx 0.785$ でおよそ 0.3224、x の最小値が $t \approx 2.356$ でおよそ -0.0670 であること、また小問 (ii) では y が $t = 1$ で最大値 $1/\mathrm{e} \approx 0.3679$ をとることが確認できる。
- 小問 (ii) の妥当性の確認：$y = t\mathrm{e}^{-t}$ はおなじみの「重根」の形であり、この系の行列（matrix）が重複した固有値（eigenvalue）-1 をもつことから納得できる。

よくある間違い

- x の最小値を $t = -\frac{\pi}{4}$ や $\frac{7\pi}{4}$ でとるとしてしまう：そこでも $\dot{x} = 0$ となるが、そこでは $x > 0$ である（極大値（local maximum）である）。$\cos t$ の符号を確認すること。
- 螺旋が原点に到達するのは $t \to \infty$ の極限のみであることを忘れる、あるいは時計回りに巻くように描いてしまう：$\theta = t$ は増加するので、反時計回りに巻く。
- 小問 (ii) で、原点における鉛直な接線を見落とす：$y \to 0$ であるが $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \to \infty$ となる。

STEP のその先へ

線形系 $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ の振る舞いは、すべて A の固有値によって決まる。ここで $A = \begin{pmatrix} -1 & -k \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1 \pm \sqrt{-k}$ である。$k = 1$ のときは複素共役の組 $-1 \pm \mathrm{i}$ となり、**安定渦状点**（stable spiral）を与える。$k = 0$ のときは重複した固有値 -1 となり、**退化結節点**（degenerate node）を与える。そして $k < 0$ のときは 2 つの実固有値が得られる。このように不動点（fixed points）を分類すること（相平面解析（phase-plane analysis））は、大学 1 年次の中核的な話題である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は、豊富な図を用いてこれを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。