解答例

STEP II 2019、第 9 問

力学 ・ 原点からの放物体の距離

> **STEP II 2019、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.10 節「こちらへ戻ってくるボール」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/coming-back.html

鍵となる考え方

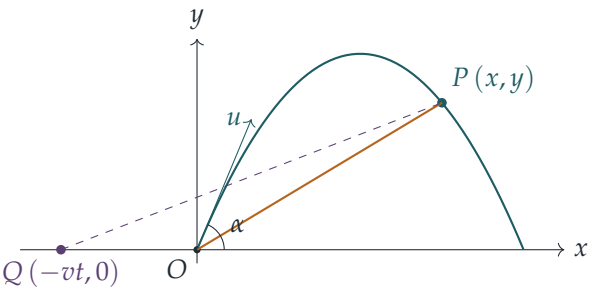
距離そのものは微分しにくいが、その 2 乗なら扱いやすい。OP が増加する（increasing）のは、ちょうど $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(OP^2) > 0$ となるときである。$x^2 + y^2$ を微分すると t と t の二次式（quadratic）の積が得られるので、問題全体は「この二次式はいつ正になるか？」という問いに帰着し、それには判別式（discriminant）が答えてくれる。小問 (ii) も同じ計算であり、水平方向の隔たりに Q の運動を加えるだけである。

解答

P と Q を質点（particle）とみなし、空気抵抗（air resistance）は無視する。O を原点とし、x 軸を水平方向（P の運動の向き）に、y 軸を鉛直上向きにとる。$s = \sin\alpha$、$c = \cos\alpha$ とおくと、$0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ よりどちらも正である。時刻 t において

$$x = uct, \qquad y = ust - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

であり、P は再び $y = 0$ となるとき、すなわち $T = \dfrac{2us}{g}$ において着地する。



小問 (i)

$r = OP$ とおくと $r^2 = x^2 + y^2$ であり、$\dot{x} = uc$、$\dot{y} = us - gt$ を用いて

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= 2\left[u^2c^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= 2t\left[u^2c^2 + u^2s^2 - \tfrac{3}{2}usgt + \tfrac{1}{2}g^2t^2\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2\right),\end{aligned}$$

となる。ここで $c^2 + s^2 = 1$ を用いた。飛行中は $r > 0$ であるから、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2r\dot{r}$ の符号は $\dot{r}$ の符号と一致し、さらに $t > 0$ であるから、その符号は

$$f(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2u^2.$$

の符号と一致する。この二次式の最高次の係数（leading coefficient）は正であり、判別式は

$$9u^2s^2g^2 - 8u^2g^2 = u^2g^2\left(9s^2 - 8\right).$$

である。

$s < \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **のとき**、（$s > 0$ より）$9s^2 < 8$ であるから、判別式は負となり、すべての t に対して $f(t) > 0$ である。したがって飛行中つねに $\dot{r} > 0$ であり、OP は増加する。

$s > \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **のとき**、判別式は正であり、f は相異なる 2 つの根

$$t_{1,2} = \frac{u\left(3s \mp \sqrt{9s^2 - 8}\right)}{2g},$$

をもち、$t_1 < t < t_2$ において $f(t) < 0$ となる。2 つの根はともに正である（和 $3us/g$ と積 $2u^2/g^2$ がともに正であるから）。この区間が実際に P が空中にある間に現れることを確かめなければならない。

? **考えてみよう** 二次式はどこかで負になるが、それが P の着地より前に起こるとどうしてわかるのか？

着地時刻における f の値を求めると

$$f(T) = g^2 \cdot \frac{4u^2s^2}{g^2} - 3usg \cdot \frac{2us}{g} + 2u^2 = 2u^2(1-s^2) = 2u^2c^2 > 0.$$

となる。よって T は 2 根の間にはない。一方、f の頂点（vertex）は $t = \frac{3us}{2g} < \frac{2us}{g} = T$ にあるので、T は頂点より右側にある。T は $[t_1, t_2]$ の外にあるから、$T > t_2$ でなければならない。したがって $0 < t_1 < t_2 < T$ であり、$t_1 < t < t_2$ において $\dot{r} < 0$ となる。すなわち、P が着地する前のある時刻に OP は減少しており、題意は示された。

小問 (ii)

Q はなめらかな（smooth）地面上を、P の側から遠ざかる向きに一定の速さ v で滑るので、時刻 t には $(-vt, 0)$ にある。P と Q の水平方向の隔たりは $x + vt = wt$ であり、ここで

$$w = uc + v > 0,$$

である。また鉛直方向の隔たりは y である。よって $QP^2 = w^2t^2 + y^2$ であり、先ほどとまったく同様に

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(QP^2\right) &= 2\left[w^2t + \left(ust - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(us - gt)\right] \\ &= t\left(g^2t^2 - 3usg\,t + 2w^2 + 2u^2s^2\right).\end{aligned}$$

となる。飛行中の符号は $h(t) = g^2t^2 - 3usg\,t + 2(w^2 + u^2s^2)$ の符号と一致し、その判別式は

$$9u^2s^2g^2 - 8g^2\left(w^2 + u^2s^2\right) = g^2\left(u^2s^2 - 8w^2\right).$$

である。これが負になるのはちょうど $8w^2 > u^2s^2$ のとき、すなわち（w と us はともに正であるから）$2\sqrt{2}\,w > us$ のときである。$w = uc + v$ を代入すると

$$2\sqrt{2}\,(uc + v) > us \iff 2\sqrt{2}\,v > \left(\sin\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\right)u.$$

となる。よって与えられた条件のもとでは、すべての t に対して $h(t) > 0$ であり、したがって $t > 0$ において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(QP^2) > 0$ となるから、P の飛行中つねに QP は増加する。以上で題意は示された。

小問 (i) と同じ議論（今度は $h(T) = 2w^2 > 0$）により、不等式の向きが厳密に逆になる場合には、P が着地する前のある間 QP が実際に減少することがわかる。したがって、等号が成り立つ境界の場合を除けば、この条件は実は必要条件（necessary condition）でもある。

検算

- 小問 (ii) で $v = 0$ とおくと $2\sqrt{2}\cos\alpha > \sin\alpha$、すなわち $\tan\alpha < 2\sqrt{2}$、すなわち $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$ となり、小問 (i) の結果が再び得られる。このとき Q は O にとどまるのだから、これは当然である。
- 臨界角は $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 70.5°$ であり、u や g によらない。これは次元解析（dimensional analysis）から要請されるとおりである（利用できる無次元量は α しかない）。
- $u = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\sin\alpha = 0.97$ とすると、根は $t_1 \approx 1.14\,\mathrm{s}$ と $t_2 \approx 1.83\,\mathrm{s}$ であり、どちらも着地時刻 $T \approx 1.98\,\mathrm{s}$ より前である。コンピュータで飛行を時間刻みで追うと、これらの時刻の間で OP が減少すること、また多数のランダムな u、α、v について、距離 QP が増加するのはちょうど小問 (ii) の不等式が成り立つときであることが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (i) で「判別式が正である」で止めてしまうこと。OP の落ち込みが P の着地後ではなく着地前に起こることを示さなければならない。
- Q を $(vt, 0)$ に置いてしまうこと。Q は P の側から遠ざかるので、P との水平方向の隔たりは $uct + vt$ である。
- 因数 t を忘れること、あるいは $t > 0$ に言及せずに t で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{r}|^2 = 2\,\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ の符号を調べることは、物体が近づいているのか遠ざかっているのかを問う標準的な方法であり、軌道力学（orbital mechanics）や 2 物体の相対運動（relative motion）においても再び現れる。小問 (ii) は実のところ、Q に対する P の相対位置についての問題なのである。約 70.5° より急な角度で投げ上げられた放物体（projectile）は、飛行の一部の間、投げた人のほうへ戻ってくるという鮮やかな事実は、力学の教科書で好んで取り上げられる題材である。さらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。