解答例

STEP II 2019、第 8 問

純粋数学 ・ 乗法的な行列関数

> **STEP II 2019、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.3 節「行列式を行列式たらしめるもの」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/determinant-axioms.html

鍵となる考え方

すべては、ただ一つの規則 $\mathrm{f}(\mathbf{MN}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\mathrm{f}(\mathbf{N})$ をうまく選んだ積に適用することから導かれる。毎回のコツは、同じ行列を二通りに表す方法、あるいは自分自身と別の何かとの積になっている行列を見つけ、f の値を比べることである。行列式（determinant）はそのような関数の一つなので、答えがどうなるべきかの手がかりとして役に立つ。しかし、f が行列式**そのもの**であると仮定してはならない。

解答

小問 (i)

$\mathbf{MI} = \mathbf{M}$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \mathrm{f}(\mathbf{MI}) = \mathrm{f}(\mathbf{M})\,\mathrm{f}(\mathbf{I}).$$

$\mathrm{f}(\mathbf{M}) \neq 0$ と与えられているので、これで割ることができ、$\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ を得る。

（この仮定がなければ、このように結論することはできない。恒等的に零である関数も乗法的（multiplicative）だからである。）

小問 (ii)

積を計算すると $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$ となるので、

$$\mathrm{f}(\mathbf{J})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{J}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1.$$

よって $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = \pm 1$ であり、$\mathrm{f}(\mathbf{J}) \neq 1$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ を得る。

> **考えてみよう** $\mathbf{J}$ を掛けると、行列はどう変わるか？

$\mathbf{J}$ を左から掛けると行が入れ替わり、右から掛けると列が入れ替わる：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}.$$

それぞれに f を適用し、$\mathrm{f}(\mathbf{J}) = -1$ を用いると、

$$\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}.$$

1 つ目の式から $\mathrm{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathrm{f}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ が得られ、2 つ目の式の両辺に -1 を掛けると、これが $\mathrm{f}\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ にも等しいことがわかる。これが示すべきことであった。

小問 (iii)

$\mathbf{A}$ の第 1 行を $(a \;\; b)$ とし、第 2 行をその λ 倍とする。$\mathbf{B}$ を 2 つの等しい行をもつ行列とし、$\mathbf{K}$ において $k = \lambda$ とする。$\mathbf{K}$ を左から掛けると第 2 行が k 倍されるので、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = \mathbf{KB}.$$

ここで、$\mathbf{B}$ の行を入れ替えても行列は変わらないので、小問 (ii)（$c = a, d = b$ とする）より

$$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = -\mathrm{f}(\mathbf{B}),$$

となり、$\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ でなければならない。したがって $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\mathbf{K})\,\mathrm{f}(\mathbf{B}) = 0$ である。この議論はすべての実数 λ に対して成り立ち、$\lambda = 0$ の場合も含む。

小問 (iv)

まず 3 つの行列を計算する。$k \neq 0$ のとき $\mathbf{K}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$ であり、

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

次に、$\mathbf{K}$ による共役 (conjugation) は f の値を変えない。実際、$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1})\,\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{K}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}).$$

考えてみよう k をどの値にすると、$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K}$ が $\mathbf{P}^2$ や $\mathbf{P}^{-1}$ になるか？

$k = 2$ とすると $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{P}^2$ となるので、

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = \mathrm{f}(\mathbf{P}^2) = \mathrm{f}(\mathbf{P})^2,$$

したがって $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ または 1 である。

$k = -1$ とすると $\mathbf{K}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}$ となるので、$\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{P})$ である。ところが $\mathrm{f}(\mathbf{P})\,\mathrm{f}(\mathbf{P}^{-1}) = \mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = 1,$$

となり、特に $\mathrm{f}(\mathbf{P}) \neq 0$ である。2 つの結果を合わせると、

$$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1.$$

検算

行列式はすべての仮定を満たす。乗法的であり、$\det \mathbf{I} = 1$ かつ $\det \mathbf{J} = -1$ である。また、行列式は得られた結論すべてと一致する。行や列を入れ替えると符号が変わり、比例する行をもつ行列の行列式は 0 であり、$\det \mathbf{P} = 1$ である。それほど自明でない例として $\mathrm{f}(\mathbf{M}) = \operatorname{sgn}(\det \mathbf{M})\,|\det \mathbf{M}|^{0.7}$ がある。数千個のランダムな行列を用いたコンピュータによる検証で、両方の関数について、乗法の規則、行と列の入れ替えに関する等式、比例する行に対する $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = 0$、さらに $\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 1$ が確認された。

よくある間違い

- f = det と仮定してしまう。この問題は乗法性だけから性質を導くことを求めており、行列式は手がかりにすぎない。

- $\mathrm{f}(\mathbf{K}^{-1}) = 1/\mathrm{f}(\mathbf{K})$ を根拠なく用いる。これには小問 (i) で得た $\mathrm{f}(\mathbf{I}) = 1$ と、$\mathbf{K}$ が逆行列をもつ（invertible）ための条件 $k \neq 0$ が必要である。
- $\mathrm{f}(\mathbf{P})^2 = \mathrm{f}(\mathbf{P})$ で止まってしまい、$\mathrm{f}(\mathbf{P}) = 0$ の可能性を排除し忘れる。

STEP のその先へ

f のように乗法を保つ写像は、逆行列をもつ 2×2 行列全体のなす群（group）から零でない実数全体への**準同型**（homomorphism）である。小問 (iv) は、ある古典的な議論の出発点である。$\mathbf{P}$ のようなせん断行列（shear matrix）は交換子（commutator）の積であるため、このような準同型はすべてそれらを 1 に写し、結局 f は行列式だけに依存することになる。また、各行について線形（linear）であり、交代的（alternating）で、$\mathbf{I}$ において 1 に等しい関数は行列式しかないことも示せる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はこのような性質から行列式を構成しており、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）は準同型を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。