解答例

STEP II 2019、第 7 問

純粋数学 • ベクトルと内積

> **STEP II 2019、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

単位ベクトル（unit vector）については、長さも角度もどちらも内積（scalar product）から得られる：$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。そこで、和が零になるという条件を、いくつかのベクトルを一方の辺に、残りを他方の辺に分けて書き、両辺の長さの 2 乗をとるのがうまい方法である。こうするとベクトルの等式が内積どうしの等式に変わり、そこから図形の形がわかる。

解答

以下では一貫して、単位ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して

$$|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2 \pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

が成り立つことを用いる。

小問 (i)

$\mathbf{a}+\mathbf{b} = -\mathbf{c}$ であるから、両辺の長さの 2 乗をとると

$$2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2 = 1,$$

となり、求めるとおり $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ である。

条件は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ について対称であるから、同様に（$\mathbf{b}+\mathbf{c} = -\mathbf{a}$ および $\mathbf{c}+\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ と書くことで）$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = -\frac{1}{2}$ を得る。したがって

$$AB^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 3,$$

であり、同様に $BC^2 = CA^2 = 3$ である。3 辺の長さはすべて $\sqrt{3}$ であるから、**三角形 ABC は正三角形（equilateral triangle）である**。（どの 2 つの位置ベクトル（position vector）のなす角も 120° であり、$\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ であるから、O はこの三角形の外心（circumcentre）であると同時に重心（centroid）でもある。）

小問 (ii)

条件を $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = -(\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4)$ と書き、両辺の長さの 2 乗をとると

$$2 + 2\,\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 2 + 2\,\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4.$$

となる。ベクトルを残り 2 通りの方法で組に分けると、同様にして

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_4, \qquad \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3.$$

を得る。$A_iA_j^2 = 2 - 2\,\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ であるから、これは向かい合う辺の長さが等しいことを意味する：$A_1A_2 = A_3A_4$、$A_1A_3 = A_2A_4$、$A_1A_4 = A_2A_3$。

(a) 4 点が同一平面上にある場合

考えてみよう 4 点を含む平面は原点を通らなければならないだろうか？

通らなければならない。4 点の重心は $\frac{1}{4}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = \mathbf{0}$ であり、平面上の点の重心はその平面上にある。よってこの平面は O を含み、どの A_i も O からの距離が 1 であるから、4 点はその平面上で O を中心とする半径 1 の円周上にある。以下ではこの平面上で考える。

$\mathbf{w} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ とおくと、$\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$ である。

$\mathbf{w} = \mathbf{0}$ のとき、$\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1$ かつ $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_3$ である。

$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ のとき、$\mathbf{a}_3$ と $\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = -\mathbf{w}$ の内積をとり、(ii) を用いると

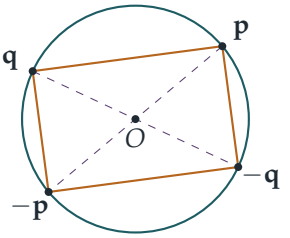
$$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4) = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2.$$

となる。よって $\mathbf{a}_3$ は $\mathbf{w}$ 方向の成分が一定の単位ベクトルである。すなわち、その終点は $\mathbf{w}$ に垂直なある定直線上にあり、直線と円の共有点は高々 2 個である。ところで $-\mathbf{a}_1$ と $-\mathbf{a}_2$ はそのようなベクトルの 2 つである。実際、

$$(-\mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{w} = -(1 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = -\tfrac{1}{2}|\mathbf{w}|^2,$$

であり、$-\mathbf{a}_2$ についても同様である。また $A_1 \neq A_2$ であるから、この 2 つは異なる。したがって $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1$ または $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_2$ であり、このとき $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{w} - \mathbf{a}_3$ は残りの一方となる。

いずれの場合も、4 つの位置ベクトルは、$\mathbf{q} \neq \pm\mathbf{p}$ を満たすある単位ベクトルを用いて $\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{q}, -\mathbf{q}$ と表される。よって 4 点は円の 2 本の直径の両端である。これらがつくる四角形は対角線が（O で）互いに他を二等分するから平行四辺形（parallelogram）であり、さらに対角線の長さが等しい（どちらも長さ 2）から**長方形（rectangle）**である。これが正方形になるのは、2 本の直径が垂直であるときに限る。



（厳密には、頂点は円周に沿った順にとるべきである。たまたまラベルが $A_1 = \mathbf{p}$, $A_2 = \mathbf{q}$, $A_3 = -\mathbf{q}$, $A_4 = -\mathbf{p}$ となっていた場合、この順に結ぶと、この長方形の 2 辺と 2 本の対角線をなぞることになる。）

(b) 正四面体の場合 このとき 6 本の辺 A_iA_j はすべて等しいので、6 つの内積 $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ $(i \neq j)$ はすべて同じ値をとる。これを k とする。$\mathbf{a}_1$ と零となる和との内積をとると

$$0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = 1 + 3k,$$

となるから、$k = -\frac{1}{3}$ である。すると各辺について

$$A_1A_2^2 = 2 - 2k = 2 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{3}, \qquad \text{よって辺の長さは} \qquad \sqrt{\tfrac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

である。

検算

- 頂点が $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ である四面体は正四面体（regular tetrahedron）であり、位置ベクトルはどれも単位ベクトルでその和は $\mathbf{0}$、辺の長さは $\frac{1}{\sqrt{3}}|(0,2,2)| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1.633$ である。
- (i) と比べてみよう。120° をなす 3 つの単位ベクトルからは辺の長さ $\sqrt{3} \approx 1.732$ が得られ、こちらのほうがわずかに長い。正四面体の頂点のほうが球面上で「より混み合っている」のだから、これは納得できる。
- 和が零になる 4 つの単位ベクトルの組を無作為に数千通り生成してコンピュータで確かめたところ、(ii) の 3 つの内積の等式はすべて成り立ち、また平面の場合には点が必ず $\pm\mathbf{p}, \pm\mathbf{q}$ という向かい合う組になっていた。

よくある間違い

- (i) で $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\frac{1}{2}$ を示したところで止めてしまう。三角形が正三角形であると結論するには、3 つの内積すべて（あるいは 3 辺の長さすべて）が必要である。
- (a) で、頂点の並び方を確かめずに、向かい合う辺が等しいことから「平行四辺形」と結論してしまう。あるいは、平面が O を通ることを示し忘れる。

STEP のその先へ

和が零で、どの 2 つの内積も等しい単位ベクトルの組は、**正単体**（regular simplex）の頂点になる。n 次元ではそのようなベクトルが $n+1$ 個あり、$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j = -\frac{1}{n}$ となる。これが上で得た $-\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{3}$ である。このような配置は化学（メタンの結合角 109.5° は $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})$ である）や符号理論（coding theory）に現れる。すべての内積 $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$ を並べた行列は**グラム行列**（Gram matrix）とよばれ、ベクトルの配置を回転の違いを除いて決定する。これがこの問題全体の背後にある考え方である。さらに学ぶには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。