解答例

STEP II 2019、第 6 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2019、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの方程式でも、右辺（right-hand side）は x と y にただ一つの組合せを通してのみ依存している。小問 (i) では $y+x$、小問 (ii) では $y-x$ である。後者は、二次式が実は $(y-x)^2+4(y-x)+3$ だからである。この一つの観察によって、直線解が求まり、停留点（stationary point）の位置が直線上に限定され、さらに（小問 (i) では）方程式を変数分離（separation of variables）できる形に変形できる。あとは解曲線（solution curve）が交わらないという注意がすべてを片付けてくれる。二つの直線解の間から出発した曲線は、永遠にその間に閉じ込められるのである。

解答

小問 (i)

直線解。 $y=mx+c$ とすると $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=m$ であるから、

$$m=mx+c+x+1=(m+1)x+(c+1)\quad \text{任意の} x.$$

が成り立たなければならない。x の係数を比較すると $m=-1$ であり、定数項から $c+1=m=-1$、すなわち $c=-2$ を得る。よって解は $y=-x-2$ である。

停留点の位置。 $y=y_3(x)$ の停留点では $0=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x+1$ であるから、その点は直線 $y=-x-1$ 上にある。

次に $k<-2$ とする。曲線 $y=y_3(x)$ と直線 $y=-x-2$ はともに解であり、$x=0$ において曲線は直線より下にある（$k<-2$）。両者は決して交わらないので、曲線はすべての x に対して直線より下にとどまる。すなわち $y_3(x)<-x-2<-x-1$ である。

したがって至るところで $y_3(x)+x+1<-1<0$ となる。傾きは決して 0 にならない（実際、常に -1 より小さい）ので、停留点は存在しない。

停留点はすべて極小点である。方程式を微分すると

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1.$$

停留点では第 1 次導関数（first derivative）が 0 であるから、第 2 次導関数（second derivative）は $1>0$ となり、その点は極小点（local minimum）である。

解く。$Y=y+x$ とおくと $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1=Y+2$ である。直線 $Y=-2$ 上ではこれはすでに得た解である。それ以外の場合は変数分離して

$$\int\frac{\mathrm{d}Y}{Y+2}=\int\mathrm{d}x\quad\Longrightarrow\quad\ln|Y+2|=x+\text{定数}\quad\Longrightarrow\quad Y+2=Ae^x,$$

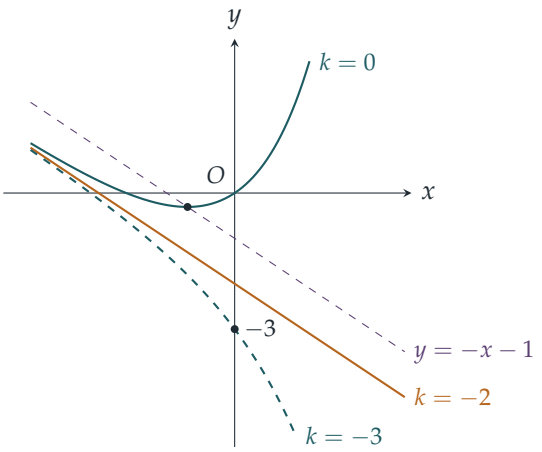
を得る。ここで A は定数である（$A=0$ の場合が直線解にあたる）。よって $y=Ae^x-x-2$ であり、$y(0)=k$ から $A=k+2$ となる：

$$y_3(x)=(k+2)e^x-x-2.$$

これは先に得た結果と整合する。$y_3'(x)=(k+2)e^x-1$ は、$k\le-2$ のときは決して 0 にならず、$k>-2$ のときは $e^x=1/(k+2)$ でただ一度だけ 0 になる。

三つの曲線。

- $k=0$：$y=2e^x-x-2$ で、原点を通る。極小点は $e^x=\frac{1}{2}$ となるところ、すなわち $\left(-\ln 2,\ \ln 2-1\right)\approx(-0.69,-0.31)$ であり、直線 $y=-x-1$ 上にある。$x\to-\infty$ のとき $2e^x\to0$ であり、曲線は $y=-x-2$ に上から近づく。$x\to\infty$ のときは指数関数が支配的になる。
- $k=-2$：直線 $y=-x-2$ そのものである。
- $k=-3$：$y=-e^x-x-2$ で、$(0,-3)$ を通り、常に減少する。$x\to-\infty$ のとき $y=-x-2$ に下から近づき、$x\to\infty$ のとき $-e^x$ のように急降下する。



小問 (ii)

右辺の書き換え。項をまとめると

$$x^2+y^2-2xy-4x+4y+3=(y-x)^2+4(y-x)+3=(y-x+1)(y-x+3).$$

$u=y-x$ とおいて $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(u+1)(u+3)$ と書いておくとよい。

直線解。$y=mx+c$ とすると $u=(m-1)x+c$ であり、

$$m=\big((m-1)x+c+1\big)\big((m-1)x+c+3\big)\quad \text{任意の}x.$$

が成り立たなければならない。$m\neq 1$ ならば右辺は x の正真正銘の二次式であり、定数に等しくなることはないので、$m=1$ である。このとき $1=(c+1)(c+3)$、すなわち $c^2+4c+2=0$ であり、$c=-2\pm\sqrt{2}$ を得る。二つの解は

$$y=x-2+\sqrt{2}\qquad \text{および}\qquad y=x-2-\sqrt{2}.$$

である。

y_4 の停留点。傾きが 0 になるのは $u=-1$ または $u=-3$ のときに限るので、停留点はどれも

$$y=x-1\qquad \text{または}\qquad y=x-3.$$

上にある。これらの直線の間では $-3<y-x<-1$ であるから $u+1<0<u+3$ となり、傾き $(u+1)(u+3)$ は**負**である。（その外側では正である。）

曲線の存在範囲。$x=0$ において $u=-2$ であり、これは $-2-\sqrt{2}\approx -3.41$ と $-2+\sqrt{2}\approx -0.59$ の間にある。よって $x=0$ において曲線は二つの直線解の間にあり、解曲線は交わらないので、

$$x-2-\sqrt{2}<y_4(x)<x-2+\sqrt{2}\quad \text{任意の}x.$$

が成り立つ。停留点の載る二直線に挟まれた帯（$-3 < u < -1$）は、この帯の内側に含まれている。

考えてみよう 曲線は二本の平行線の間に閉じ込められている。では、帯の内部で曲線はどこへ向かうのだろうか。

$u = y_4 - x$ を追跡する。u は

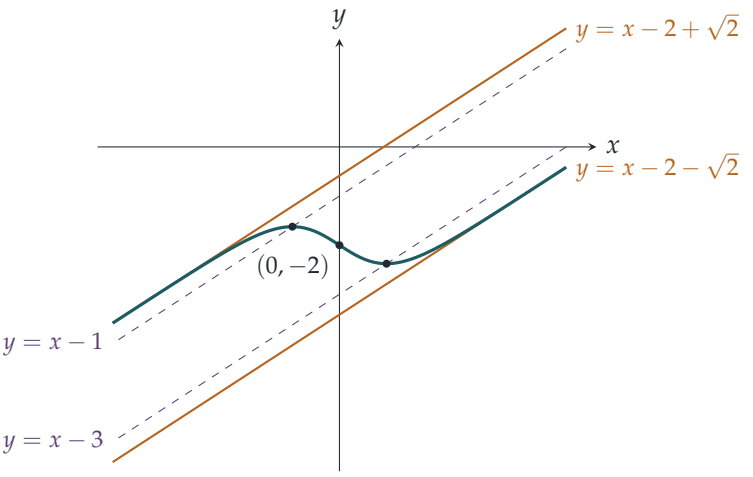
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (u+1)(u+3) - 1 = u^2 + 4u + 2 = \left(u + 2 - \sqrt{2}\right)\left(u + 2 + \sqrt{2}\right),$$

を満たし、これは $-2 - \sqrt{2} < u < -2 + \sqrt{2}$ である限り負であり、それは常に成り立つ。よって u は狭義単調減少（strictly decreasing）かつ有界であり、したがって $x \to \pm\infty$ のときの極限をもつ。そのような極限においては $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ は 0 に近づかなければならない（そうでなければ u は限りなく変化してしまう）ので、極限値は根である。すなわち $x \to -\infty$ のとき $u \to -2 + \sqrt{2}$、$x \to +\infty$ のとき $u \to -2 - \sqrt{2}$ である。

したがって、左から右へ読んでいくと次のようになる。

- 左のはるか遠くでは、曲線は $y = x - 2 + \sqrt{2}$ に下から寄り添い、傾きは 1 に近い。
- u が -1 を下回るとき、曲線は $y = x - 1$ とただ一点で交わり、そこは**極大点**（local maximum）である（傾きが正から負に変わる）。
- 曲線は傾き $(-1)(1) = -1$ で $(0, -2)$ を通って下降する。
- u が -3 を下回るとき、曲線は $y = x - 3$ とただ一点で交わり、そこは**極小点**である。
- その後曲線は再び上昇し、$y = x - 2 - \sqrt{2}$ に上から寄り添い、傾きは 1 に近づく。

u は狭義単調減少であるから、$u = -1$ と $u = -3$ はそれぞれちょうど一度ずつ通過される。よって停留点はちょうど二つである。もう一つ美しい性質がある。(x, y) を $(-x, -4 - y)$ に置き換えても、方程式も出発点 $(0, -2)$ も変わらない。したがって曲線は $(0, -2)$ に関して点対称（half-turn symmetry）であり、極大点と極小点はその点に関して互いに対称な位置にある。



検算

- 小問 (i) では代入して確かめる。$y = (k+2)e^x - x - 2$ から $y' = (k+2)e^x - 1$ であり、また $y + x + 1 = (k+2)e^x - 1$ である。$k = -2$ とおくと直線解に戻る。
- $k = 0$ のとき、極小点 $(-\ln 2, \ln 2 - 1) \approx (-0.693, -0.307)$ は確かに $y = -x - 1$ 上にある。
- 小問 (ii) では、$(0, -2)$ から出発する逐次的な数値解（コンピュータで確認済み）は二直線の間にとどまり、$y = x - 1$ 上の $(-0.623, -1.623)$ 付近で極大、$y = x - 3$ 上の $(0.623, -2.377)$ 付近で極小に達し、$x = \pm 6$ までには漸近線（asymptote）との差がおよそ 10^{-7} 以内になる。これら二点は、対称性から予想されるとおり、$(0, -2)$ に関して互いに対称である。

よくある間違い

- 解曲線が交わらないという性質を使い忘れること。「$k < -2$ ならば停留点は存在しない」と言うには、$x = 0$ においてだけでなく、**すべての** x に対して曲線が $y = -x - 2$ より下にとどまることが必要である。
- y_4 が直線解のどちらかと交わるように描いたり、極大と極小を逆に描いたりすること。どちらがどちらであるかは、破線の間での $(u+1)(u+3)$ の符号によって決まる。
- 小問 (ii) で m と c を求める際に、$m = 1$ の場合を先に除外（あるいは確認）せずに $m - 1$ で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

問題冒頭の注意は、ピカール＝リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）のうち一意性（uniqueness）の部分である。すなわち、右辺が滑らかであれば、各点を通る解はちょうど一つであり、したがって解曲線は交わり得ない。小問 (ii) は、姿を変えた**自励的**（autonomous）な方程式 $u' = u^2 + 4u + 2$ である。そして、公式を一切使わずに、平衡点（equilibrium）とその間での u' の符号から曲線の行方を見出した方法は、微分方程式（differential equation）の定性的理論（qualitative theory）の出発点である。Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は、一意性とこの相直線（phase line）による描像の両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。