解答例

STEP II 2019、第 5 問

純粋数学 • 反復の不動点

> **STEP II 2019、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

定数列は**不動点**（fixed point）、すなわち $\mathrm{f}(x) = x$ の解から始まる。周期（period）2 の数列は、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ の解のうち不動点でないものから始まる。どの不動点も $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ を満たすので、$\mathrm{f}(x) - x$ は四次式（quartic）$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x$ の因数（factor）でなければならない。もう一方の因数である二次式（quadratic）が求まれば、あとはすべて判別式（discriminant）の問題に帰着する。

解答

両方の小問に使う因数分解

どちらの小問でも、ある定数 c を用いて $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + c$ と表せる（(i) では $c = p$、(ii) では $c = q$）。任意の x と y に対して

$$\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(x) = (y^2 - x^2) - p(y - x) = (y - x)(y + x - p).$$

$y = \mathrm{f}(x)$ とおき、両辺に $\mathrm{f}(x) - x$ を加えると

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - x &= [\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) - \mathrm{f}(x)] + [\mathrm{f}(x) - x] \\ &= (\mathrm{f}(x) - x)(\mathrm{f}(x) + x - p + 1).\end{aligned}$$

ここから、以下で用いる二つの帰結が得られる。

- 数列が周期 2 をもつのは、a が $Q(x) = \mathrm{f}(x) + x - p + 1$ の根であって、$\mathrm{f}(x) - x$ の根では**ない**ときであり、そのときに限る。実際、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a$ ならば $u_2 = u_0$ であり、各項は直前の項によって定まるので、帰納法（induction）によりすべての n

について $u_{n+2} = u_n$ となる。このとき数列が定数列でないのは $u_1 \neq u_0$、すなわち $f(a) \neq a$ のときであり、そのときに限る。

- x が不動点ならば $Q(x) = 2x - p + 1$ である。よって、不動点が Q の根にもなるのは $x = \frac{1}{2}(p-1)$ のときに限られる。

小問 (i)

ここでは $f(x) = x^2 - px + p$ であるから

$$f(a) - a = a^2 - (p+1)a + p = (a-1)(a-p).$$

数列が定数列となるのは $u_1 = u_0$ のとき（このときすべての項が a に等しい）であり、そのときに限るので、求める値は

$$a = 1 \quad \text{および} \quad a = p.$$

周期 2 については、もう一方の因数は

$$Q(x) = x^2 - px + p + x - p + 1 = x^2 + (1-p)x + 1,$$

であり、その判別式は

$$(1-p)^2 - 4 = (p-1-2)(p-1+2) = (p-3)(p+1).$$

- $-1 < p < 3$ のとき、判別式は負であり、Q は実数解をもたず、周期 2 を与える実数 a は存在しない。
- $p = 3$ または $p = -1$ のとき、Q はただ一つの根 $x = \frac{1}{2}(p-1)$ をもち、それはそれぞれ 1、-1 である。$p = 3$ のとき不動点は 1 と 3、$p = -1$ のとき不動点は 1 と -1 である。いずれの場合も Q の根は不動点であるから、そこから始まる数列は定数列であり、周期 2 ではない。
- $p > 3$ または $p < -1$ のとき、Q は相異なる二つの実数解をもつ。どちらも不動点ではない。上の二つ目の項目より、不動点であるならば $\frac{1}{2}(p-1)$ でなければならないが、

  $$Q\left(\tfrac{1}{2}(p-1)\right) = \tfrac{1}{4}(p-1)^2 - \tfrac{1}{2}(p-1)^2 + 1 = 1 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \neq 0$$

  である。$(p-1)^2 > 4$ だからである。したがって、a をいずれかの根にとれば周期 2 の数列が得られる。

以上より、周期 2 を与える a の値が存在するための必要十分条件は、$p > 3$ または $p < -1$ である。

小問 (ii)

今度は $\mathrm{f}(x) = x^2 - px + q$ であるから

$$\mathrm{f}(x) - x = x^2 - (p+1)x + q.$$

定数列であるためには $\mathrm{f}(a) = a$ を満たす a、すなわちこの二次式の実数解が必要である。

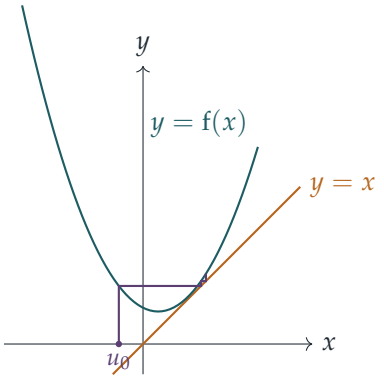
すべての x について $\mathrm{f}(x) > x$ ならば、すべての a について $\mathrm{f}(a) \neq a$ となるので、定数列は存在しない。

逆に、どの a も定数列を与えない、すなわち $g(x) = x^2 - (p+1)x + q$ が実数解をもたないと仮定する。このとき g は連続（continuous）で決して零にならないので符号を変えることはなく、$x \to \infty$ のとき $g(x) \to +\infty$ であるから、いたるところで正である。（同じことだが、判別式が負で最高次の係数（leading coefficient）が正である。）すなわち、すべての x について $\mathrm{f}(x) > x$ であり、これで「必要十分」であることが示された。

結論の導出。定数列が存在しないと仮定する。このときすべての x について $\mathrm{f}(x) > x$ であるから、任意の a に対して

$$u_{n+1} = \mathrm{f}(u_n) > u_n \quad \text{すべての} n.$$

数列は狭義単調増加（strictly increasing）であるから $u_2 > u_1 > u_0$ となる。特に $u_2 \neq u_0$ であり、数列は周期 2 をもちえない。



図はこの状況を表している。放物線は全体が $y = x$ より上にあるので、反復の「階段」は上るしかない。

最後の問い。逆（converse）は**偽**である。$p = q = 0$、すなわち $\mathrm{f}(x) = x^2$ をとる。$a = 0$ と $a = 1$ のとき数列は定数列である。周期 2 には $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a)) = a^4 = a$、すなわち

$a(a-1)(a^2+a+1)=0$ が必要である。因数 a^2+a+1 の判別式は負であるから、実数解は $a=0$ と $a=1$ のみであり、どちらも不動点である。よって、定数列を与える値は存在するにもかかわらず、周期2を与える a の値は存在しない。

考えてみよう $\mathrm{f}(x)=x^2$ はたまたまうまくいっただけなのだろうか？

そうではない。一般に、不動点を与える二次式の判別式は $D=(p+1)^2-4q$ であり、$Q(x)=x^2+(1-p)x+q-p+1$ の判別式は

$$(1-p)^2-4(q-p+1)=(p+1)^2-4q-4=D-4.$$

である。(i) と同様に、Q の根が不動点となるのは Q の判別式が零のときに限る。よって、定数列は $D\geq 0$ のときに存在し、周期2の数列は $D>4$ のときに存在する。$0\leq D\leq 4$ を満たす任意の p、q が反例（counterexample）を与える。

検算

- (i) で $p=4$ とすると、$Q(x)=x^2-3x+1$ の根は $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})\approx 2.618,\ 0.382$ である。2.618 から始めると $\mathrm{f}(2.618)=4+(2.618-4)(2.618)\approx 0.382$、さらに $\mathrm{f}(0.382)\approx 2.618$ となり、予想どおり周期2である。
- $p=3$ のとき Q の根は $x=1$ であり、$\mathrm{f}(1)=3+(1-3)=1$ となる。これは不動点であり、境界の値が除外されることが確かめられる。
- $(x^2-(p+1)x+p)(x^2+(1-p)x+1)$ を展開すると $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))-x$ になる。数千個のランダムな (p,x) でのコンピュータによる確認でも、(ii) の「周期2 $\iff$ $D>4$」という条件の確認でも、例外は見つからなかった。

よくある間違い

- $p=3$ と $p=-1$ を含めてしまう。このとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(a))=a$ は重解（repeated root）をもつが、それは不動点であり、数列は定数列になる。
- 周期2の点を探す前に、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))-x$ から因数 $\mathrm{f}(x)-x$ を取り除く必要があることを忘れる。
- 最後の問いで、不等式の向きだけから議論してしまう。「...は正しいか？」という問いに決着をつけるのは、具体的な反例一つである。

STEP のその先へ

これは**離散力学系**（discrete dynamical systems）への第一歩である。どの二次写像も、一次の変数変換によってロジスティック写像（logistic map）$x \mapsto rx(1-x)$ と同値になる。パラメータが大きくなるにつれて、不動点は 2 周期軌道に、次いで 4 周期軌道にと移り変わり、周期倍分岐（period-doubling cascade）を経てカオス（chaos）に至る。ここで求めた、Q の判別式が零になる境界値は、これらの分岐（bifurcation）の最初のものである。Strogatz の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（非線形力学とカオス）は非常に読みやすい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。