解答例

STEP II 2019、第 4 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型の三角関数の積

> **STEP II 2019、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

角が毎回 2 倍（または半分）になる余弦の積は、最も小さい角の正弦を掛けると次々に打ち消し合う（telescoping）。倍角の公式（double-angle formula）$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ によって、因子が一つずつ吸収されていくからである。積を閉じた形で表せれば、対数（logarithm）をとることで積は和に変わり、微分すると $\ln\cos$ は $\tan$ に変わる。正接の和はここから生じる。無限積・無限級数の場合は、二つの標準的な極限を用いて $n \to \infty$ とすれば得られる。

解答

小問 (i)

この積を P とおく。$\sin\frac{\pi}{9} \neq 0$ であるから、これを掛けて恒等式を 3 回用いることができる。

$$8\sin\tfrac{\pi}{9}\,P = 4(2\sin\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9})\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = 2(2\sin\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9})\cos\tfrac{4\pi}{9}$$
$$= 2\sin\tfrac{4\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \sin\tfrac{8\pi}{9} = \sin(\pi - \tfrac{\pi}{9}) = \sin\tfrac{\pi}{9}.$$

両辺を $8\sin\frac{\pi}{9}$ で割って、

$$\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{2\pi}{9}\cos\tfrac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}.$$

小問 (ii)

ここでは角 $x, \frac{x}{2}, \ldots, \frac{x}{2^n}$ が半分ずつになっていくので、最も小さい角は $x/2^n$ である。$0 < x/2^n < \frac{1}{2}\pi$ であるから、その正弦は 0 でない。$\sin(x/2^n)$ を掛けると、因子

$\cos(x/2^n)$ がこれと組になって $\frac{1}{2}\sin(x/2^{n-1})$ を与え、それが $\cos(x/2^{n-1})$ と組になり、以下同様に $\cos x$ まで続く。$n+1$ 回の各段階でそれぞれ因子 $\frac{1}{2}$ が一つずつ出てくる。

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2x, \qquad \text{よって} \qquad \prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)}.$$

考えてみよう 微分によって、余弦の積を正接の和に変えるにはどうすればよいか。

対数をとればよい。各 k について $0<x/2^k<\frac{1}{2}\pi$ であるから、すべての因子は正であり、$\sin 2x>0$ でもある。よって

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\ln\sin 2x-(n+1)\ln 2-\ln\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

連鎖律（chain rule）により $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\cos(x/2^k)=-\frac{1}{2^k}\tan(x/2^k)$ であることを用いて、x で微分すると

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=2\cot 2x-\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

両辺に -1 を掛けると、求める結果がそのまま得られる。

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{x}{2^n}\right)-2\cot 2x.$$

小問 (iii)

積の公式を $\cos x\neq 0$ で割り、$\sin 2x=2\sin x\cos x$ を用いると、

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin(x/2^n)\cos x}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

考えてみよう $n\to\infty$ のとき、$2^n\sin(x/2^n)$ はどうなるか。

$\theta=x/2^n$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ である。このとき

$$2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)=x\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\ \longrightarrow\ x\cdot 1=x,$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}=\frac{\sin x}{x}.$$

級数については、$j=k+2$ と置き換える。すると $\frac{1}{2^{j-2}}=\frac{1}{2^k}$、$\frac{\pi}{2^j}=\frac{\pi/4}{2^k}$ となるので、この和は小問 (ii) の級数で $x=\frac{\pi}{4}$ としたものである。この x は $(0,\frac{1}{2}\pi)$ に属する。この x に対しては $2\cot 2x=2\cot\frac{\pi}{2}=0$ であるから、$k=n$ までの部分和（partial sum）は

$$\frac{1}{2^n}\cot\left(\frac{\pi}{4\cdot 2^n}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\theta}{\tan\theta}\qquad\left(\theta=\frac{x}{2^n},\ x=\frac{\pi}{4}\right).$$

$n \to \infty$ のとき $\theta \to 0$ かつ $\theta/\tan\theta \to 1$ であるから、部分和は $1/x$ に収束（converge）する。

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^{j-2}} \tan\left(\frac{\pi}{2^j}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

検算

- 小問 (i)：$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \approx 0.9397 \times 0.7660 \times 0.1736 \approx 0.1250$。
- 小問 (ii) で $n = 0$ のとき：積は $\cos x$ であり、公式は $\sin 2x/(2\sin x) = \cos x$ を与える。和の恒等式は $n = 0$ のとき $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ となり、これは cot の倍角の公式を変形したものである。
- 小問 (iii)：級数の最初の項は $\tan\frac{\pi}{4} = 1$、$\frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} \approx 0.2071$、$\frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{16} \approx 0.0497$、...であり、コンピュータで確かめた総和は $1.27324\ldots = 4/\pi$ である。
- $\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ で $x \to 0$ とすると $1 = 1$ となり、当然そうなるべき結果が得られる。

よくある間違い

- 因子 $\frac{1}{2}$ の個数を数え間違えること。$k = 0$ から n までの積には $n+1$ 個の因子があるので、分母は 2^n ではなく 2^{n+1} である。
- すべての因子が正であることを確認せずに対数をとること。範囲 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ が重要なのはこのためである。
- $x = \frac{\pi}{4}$ で $2\cot 2x$ が 0 になることを忘れること、あるいは $x = \frac{\pi}{2}$ を用いてしまうこと（その場合 $j = 1$ の項が $\tan\frac{\pi}{2}$ となり、定義されない）。

STEP のその先へ

$\prod \cos(x/2^k) = \sin x/x$ に $x = \frac{\pi}{2}$ を代入し、各余弦を入れ子になった平方根で表すと、ヴィエト（Viète）の公式 $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$ が得られる。これは数学史上最初の無限積（infinite product）である。有限の積に対して行ったように、無限積の対数を項別に微分するには正当化が必要である。それが許されるのはどのような場合かは、解析学（analysis）の最初の講義で扱われる。オイラー（Euler）の積 $\sin x = x\prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ も同じ考え方から生まれる。厳密な背景については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。