解答例

STEP II 2019、第 3 問

純粋数学 • 多項式の根の評価

> **STEP II 2019、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

三角不等式（triangle inequality）を使うと、各項をその大きさで置き換えることで多項式（polynomial）を上から評価できる。さらに $|x| < 1$ のとき、それらの大きさは等比級数（geometric series）をなす。これにより、小さい根（root）に対する下界が得られる。大きい根については、$1/\omega$ を考えるのがこつである。f の係数（coefficient）の順序を逆にすると、まったく同じ形の多項式が得られるので、小さい根に関する結果をもう一度使うことができる。小問 (ii) では、この評価によって整数根の候補がわずか 4 つに絞られる。

解答

三角不等式

両辺とも非負であるから、それらの 2 乗を比較すれば十分である。$x_1x_2 \leq |x_1x_2| = |x_1||x_2|$ であるから、

$$|x_1 + x_2|^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2 = (|x_1| + |x_2|)^2,$$

となり、非負の平方根をとれば $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ を得る。

n 個の数については、n に関する数学的帰納法（induction）を用いる。$n = 1$ の場合は等号が成り立ち、$n = 2$ の場合はすでに示した。$n - 1$ 個の数について結果が成り立つと仮定すると、$x_1 + \cdots + x_{n-1}$ と x_n に 2 個の場合を適用して

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n| &\leq |x_1 + \cdots + x_{n-1}| + |x_n| \\ &\leq |x_1| + \cdots + |x_{n-1}| + |x_n|, \end{aligned}$$

となり、これは n 個の数に対する結果である。

小問 (i)(a)

$f(x)-1 = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ である。三角不等式を用い、次に $|a_i| \le A$ を、さらに最後の項について $1 \le A$ を用いると、

$$\begin{aligned} |f(x)-1| &\le |a_1||x| + \cdots + |a_{n-1}||x|^{n-1} + |x|^n \\ &\le A(|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n). \end{aligned}$$

$0 \le |x| < 1$ であるから、有限の等比数列の和は、すべての項が非負である無限級数の和以下である：

$$|x| + |x|^2 + \cdots + |x|^n \le \sum_{k=1}^{\infty} |x|^k = \frac{|x|}{1-|x|}.$$

したがって、求める通り $|f(x)-1| \le \dfrac{A|x|}{1-|x|}$ が成り立つ。

小問 (i)(b)

$f(\omega) = 0$ であるから $|f(\omega)-1| = 1$ となり、小問 (a) より

$$1 \le \frac{A|\omega|}{1-|\omega|}.$$

$1-|\omega| > 0$ であるから、不等号の向きを変えずに両辺に掛けることができ、$1-|\omega| \le A|\omega|$、すなわち $1 \le (1+A)|\omega|$ となる。よって

$$|\omega| \ge \frac{1}{1+A}.$$

上界はすぐに得られる：$|\omega| < 1 \le 1 + A$。よって $(*)$ が成り立つ。

小問 (i)(c)

ここでは $|\omega| \ge 1$ とする。下界は易しい：$A \ge 1 > 0$ であるから $|\omega| \ge 1 > \frac{1}{1+A}$ である。本質的なのは上界のほうである。

$|\omega| = 1$ ならば直ちに $|\omega| \le 1 + A$ であるから、$|\omega| > 1$ と仮定する。$g(y) = y^n f(1/y)$ とおくと、

$$g(y) = 1 + a_{n-1}y + a_{n-2}y^2 + \cdots + a_1y^{n-1} + y^n.$$

? **考えてみよう** なぜ g に小問 (a)、(b) の結果を使ってよいのだろうか。

これはちょうど f と同じ形をしている。定数項（constant term）は 1、最高次の係数（leading coefficient）も 1 であり、その他の係数は $a_{n-1}, \ldots, a_1$ を逆順に並べたもので、

どれも大きさは依然として A 以下である。したがって、同じ A を用いて小問 (b) を g に適用できる。

$\omega \neq 0$ であるから $g(1/\omega) = \omega^{-n} f(\omega) = 0$ となり、$1/\omega$ は $|1/\omega| < 1$ を満たす g の実根である。g に対して小問 (b) を用いると

$$\frac{1}{|\omega|} \geq \frac{1}{1+A}, \qquad \text{よって} \qquad |\omega| \leq 1 + A.$$

したがって、大きさによらず f のすべての実根について $(*)$ が成り立つ。($f(0) = 1$ であるから、0 は決して根にならないことに注意する。)

小問 (ii)

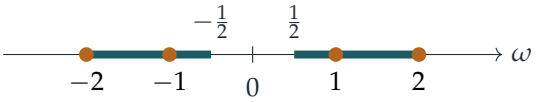
135 で割り、項を昇べきの順に並べると、方程式は $f(x) = 0$ となる。ただし

$$f(x) = 1 - \tfrac{126}{135}x - \tfrac{91}{135}x^2 - \tfrac{100}{135}x^3 - x^4 + x^5.$$

これは $n = 5$ とした小問 (i) の形をしている。定数項も最高次の係数も 1 であり、その他の係数の大きさは $\frac{126}{135}, \frac{91}{135}, \frac{100}{135}, 1$ で、いずれも $A = 1$ 以下である。よって、すべての実根は

$$\tfrac{1}{2} \leq |\omega| \leq 2.$$

を満たす。



許される範囲（色をつけた部分）にある整数は ± 1 と ± 2 だけである。もとの五次式（quintic）$p(x) = 135x^5 - 135x^4 - 100x^3 - 91x^2 - 126x + 135$ の値を計算すると：

$$\begin{aligned} p(1) &= 135 - 135 - 100 - 91 - 126 + 135 = -182, \\ p(-1) &= -135 - 135 + 100 - 91 + 126 + 135 = 0, \\ p(2) &= 4320 - 2160 - 800 - 364 - 252 + 135 = 879, \\ p(-2) &= -4320 - 2160 + 800 - 364 + 252 + 135 = -5657. \end{aligned}$$

よって、整数根は $x = -1$ のみである。実際、

$$p(x) = (x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135),$$

であり、四次の因数（quartic）は $x = -1$ で 971 となるから、-1 は単根（simple root）である。

検算

- $(x+1)(135x^4 - 270x^3 + 170x^2 - 261x + 135)$ を展開して、もとの五次式に戻ることを確かめる。
- この五次式にはほかに 2 つの実根があり、およそ 0.595 と 1.725 である。小問 (i) の予測通り、どちらも $[\frac{1}{2}, 2]$ に含まれる。
- $A = 2$ として $\mathrm{f}(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$ を試してみる。根 1 は $[\frac{1}{3}, 3]$ に含まれる。また、この評価は数百個のランダムな多項式についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (a) で x^n の項を忘れること。その係数は何らかの a_n ではなく 1 であり、$A \geq 1$ であることによってこの項を等比級数に組み込めるのである。
- 小問 (c) で、$|\omega| \geq 1$ のときに ω において小問 (a) をそのまま使おうとすること。このとき等比級数はもはや収束しない。代わりに $1/\omega$ を考えよ。
- 小問 (ii) で、135 の約数をすべて根の候補として調べること。これは正当な方法ではあるが、小問 (i) の評価を使えば調べるべき候補は 4 つだけになる。

STEP のその先へ

多項式の根を係数によって評価することは古典的なテーマである。ここで扱ったのはコーシー（Cauchy）の評価の一つの形であり、実数の絶対値（absolute value）の代わりに複素数の絶対値（modulus）を用いれば、同じ議論が複素根に対してもそのまま通用する。$y^n \mathrm{f}(1/y)$ という逆転操作は小さい根と大きい根を入れ替えるもので、代数学や複素解析（complex analysis）における標準的な道具である。このような評価や、複素根の幾何学についてさらに多くを知りたければ、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。