解答例

STEP II 2019、第 2 問

純粋数学 • 逆関数の積分

STEP II 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

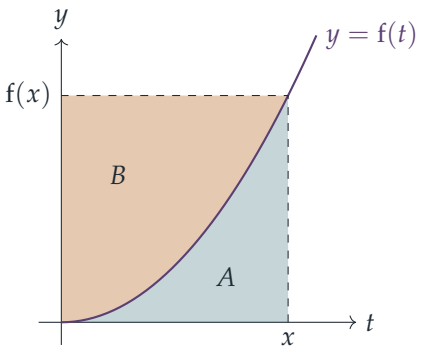
鍵となる考え方

$y = \mathrm{f}(t)$ のグラフは、$(0,0)$ と $(x, \mathrm{f}(x))$ を対角の頂点とする長方形を二つの部分に分ける。一方は曲線の下側の面積であり、もう一方は曲線と y 軸の間の面積で、これは逆関数（inverse function）の積分（integral）に等しい。したがって、二つの積分の和は長方形の面積になる。小問 (i) と (ii) では関数が陰的にしか定義されていないので、直接積分することはできないが、その**逆関数**は簡単な三次式である。この恒等式（identity）を使えば、難しい積分を易しい積分に置き換えることができる。

解答

冒頭の結果

$t > 0$ で $\mathrm{f}'(t) > 0$ かつ $\mathrm{f}(0) = 0$ であるから、f は $[0, x]$ で狭義単調増加（strictly increasing）である。よって $t > 0$ で $\mathrm{f}(t) > 0$ であり、f は $[0, \mathrm{f}(x)]$ から $[0, x]$ への逆関数 f^{-1} をもつ。同じ曲線が $y = \mathrm{f}(t)$ によっても $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ によっても表される。



$0 \le t \le x$ における曲線と t 軸の間の領域 A の面積は

$$A = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t.$$

である。$0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ における曲線と y 軸の間の領域 B は、水平な細長い帯からなる。高さ y の帯は $t = 0$ から $t = \mathrm{f}^{-1}(y)$ まで延びているので、

$$B = \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

となる。曲線は増加していて $(0,0)$ から $(x, \mathrm{f}(x))$ まで進むので、A と B は重なりなくぴったり組み合わさり、長方形 $0 \le t \le x, 0 \le y \le \mathrm{f}(x)$ を埋め尽くす。この長方形の面積は $x\,\mathrm{f}(x)$ であるから、

$$\int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\mathrm{f}(x)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{f}(x),$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (i)

$\phi(y) = y^3 + y$ とおく。$\phi'(y) = 3y^2 + 1 > 0$ であるから ϕ は狭義単調増加であり、$y \to \pm\infty$ のとき $\phi(y) \to \pm\infty$ である。よって各実数 t に対し、$\phi(y) = t$ を満たす実数 y がちょうど一つ存在し、それが $\mathrm{g}(t)$ である。言い換えれば、$\mathrm{g} = \phi^{-1}$ である。

$\mathrm{g}(0) = 0$ であること。 $t = 0$ を代入すると $\mathrm{g}(0)(\mathrm{g}(0)^2 + 1) = 0$ を得る。$\mathrm{g}(0)$ は実数なので $\mathrm{g}(0)^2 + 1 \ge 1$ であり、したがって $\mathrm{g}(0) = 0$ である。

$\mathrm{g}'(t) > 0$ であること。 $\mathrm{g}(t)^3 + \mathrm{g}(t) = t$ の両辺を t で陰関数微分（implicit differentiation）すると、

$$(3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1)\,\mathrm{g}'(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{g}'(t) = \frac{1}{3\,\mathrm{g}(t)^2 + 1} > 0,$$

となる。分母は 1 以上だからである。

考えてみよう $g(t)$ を式で書き表せないのに、どうやって積分すればよいのだろうか？

その必要はない。g は冒頭の結果の条件を満たし、その逆関数は $\phi(y) = y^3 + y$ で、これは簡単に積分できる。$x = 2$ として結果を適用するには $g(2)$、すなわち $y^3 + y = 2$ の実数解が必要である。この解は $y = 1$ であり、ϕ が狭義単調増加なので解はこれ一つだけである。よって

$$\int_0^2 g(t)\,dt = 2g(2) - \int_0^1 (y^3 + y)\,dy = 2 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

小問 (ii)

二つの定義を比べると、$h(t)$ は $y^3 + y = t + 2$ の実数解であるから、$h(t) = g(t+2)$ である。$u = t + 2$ と置換すると、

$$\int_0^8 h(t)\,dt = \int_2^{10} g(u)\,du = \int_0^{10} g(u)\,du - \int_0^2 g(u)\,du.$$

第一の積分には、$x = 10$ として冒頭の結果を用いる。$2^3 + 2 = 10$ より $g(10) = 2$ であるから、

$$\int_0^{10} g(u)\,du = 10 \times 2 - \int_0^2 (y^3 + y)\,dy = 20 - (4 + 2) = 14.$$

第二の積分には小問 (i) を用いて、

$$\int_0^8 h(t)\,dt = 14 - \frac{5}{4} = \frac{51}{4}.$$

別解。図の考え方を h に直接適用することもできる。今度は $h(0) = 1$ であり、0 ではない。曲線は $(0,1)$ から $(8,2)$ まで延びており、$h^{-1}(y) = y^3 + y - 2$ である。曲線の下側の面積は、8×2 の長方形から 0×1 の長方形（ここでは空である）を引き、さらに $1 \le y \le 2$ における曲線の左側の面積を引いたものである：

$$16 - \int_1^2 (y^3 + y - 2)\,dy = 16 - \left(\tfrac{15}{4} + \tfrac{3}{2} - 2\right) = 16 - \tfrac{13}{4} = \tfrac{51}{4}.$$

検算

- $[0,2]$ で $0 \le g(t) \le 1$ であるから、(i) の積分は 0 と 2 の間になければならない。また、g はこの区間で凹（concave）である（増加する凸（convex）関数の逆関数だからである）ので、積分は三角形の面積 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ 以上である。答え $\frac{5}{4}$ はこれに合っている。
- (ii) では $[0,8]$ で $1 \le h(t) \le 2$ であるから、積分は 8 と 16 の間にあり、12.75 もその範囲にある。

- 多数の点で三次方程式を数値的に解き、シンプソンの公式（Simpson's rule）で積分すると 1.25000 と 12.75000 が得られ、厳密な答えと一致する。

よくある間違い

- 逆関数の積分の上端を誤る：上端は $g(2) = 1$ であり、2 ではない。
- $h(0) = 0$ であるかのように冒頭の結果を h に適用してしまう。$h(0) = 1$ なので図には余分な帯があり、恒等式を修正する必要がある（あるいは $h(t) = g(t+2)$ を用いる）。
- g がきちんと定義されていること、すなわち $y^3 + y = t$ がちょうど一つの実数解をもつことの説明を忘れる。

STEP のその先へ

冒頭の恒等式は**ヤング（*Young*）の不等式**（Young's inequality）の等号成立の場合である：$f(0) = 0$ を満たす増加関数 f と任意の $a, b \geq 0$ に対して $ab \leq \int_0^a f + \int_0^b f^{-1}$ が成り立つ。$f(t) = t^{p-1}$ とすると $ab \leq a^p/p + b^q/q$ が得られ、これは解析学におけるヘルダー（Hölder）の不等式（Hölder's inequality）の出発点となる。g が微分可能（differentiable）で $g' = 1/\phi'(g)$ を満たすという事実は**逆関数定理**（inverse function theorem）である。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）はこれを丁寧に証明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。