解答例

STEP II 2019、第 11 問

確率・統計 ・ 三角形の数え上げ

> **STEP II 2019、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

3 つの長さが面積 0 でない三角形をつくるのは、短い 2 つの和が最長のものより大きいとき、かつそのときに限る。したがって、すべては固定された最大値より小さい数の組を数える問題に帰着する。最もすっきりした数え方は、真ん中の数 n_2 を固定し、n_1 としてとりうる値がいくつあるかを考えることである。小問 (i) で数え上げを行い、小問 (ii) と (iii) では、同様に確からしい（equally likely）選び方の総数で割るだけである。

解答

小問 (i)

$m = n_3$ とおく。$k \leq m-1$ として $n_2 = k$ を固定する。このとき n_1 は

$$m - k < n_1 < k,$$

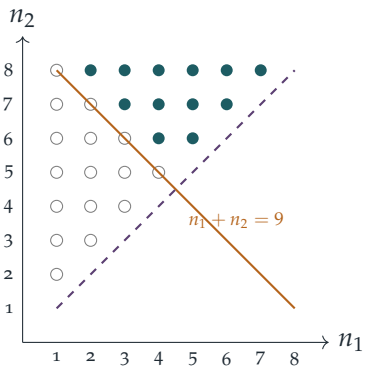
を満たさなければならないので、n_1 は $m-k+1, \ldots, k-1$ を動き、これが正である限り選び方は $2k-m-1$ 通りである。（$m-k \geq 1$ なので、条件 $n_1 > 0$ は自動的に満たされる。）

$m = 9$ のとき、個数は $2k-10$ であり、$k = 6,7,8$ で正となる：

$$2+4+6 = 12.$$

$m = 10$ のとき、個数は $2k-11$ であり、$k = 6,7,8,9$ で正となる：

$$1+3+5+7 = 16.$$



図は $n_3 = 9$ の場合を示している。塗りつぶされた点は直線 $n_1 + n_2 = 9$ の上側かつ対角線 $n_1 = n_2$ の上側にあり、その個数は $2 + 4 + 6 = 12$ である。三角形の各列が、それぞれの n_2 に対応している。

奇数の場合、 $n_3 = 2n + 1$。 $n_2 = k$ のときの個数は $2k - 2n - 2 = 2(k - n - 1)$ であり、$k = n + 2, \ldots, 2n$ で正となる。$j = k - n - 1$ とおくと、これは 1 から $n - 1$ まで動くので、

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2j = (n-1)n = n(n-1).$$

偶数の場合、 $n_3 = 2n$。$n_2 = k$ のときの個数は $2k - 2n - 1$ であり、$k = n + 1, \ldots, 2n - 1$ で正となる。$j = k - n$ とおくと、これは 1 から $n - 1$ まで動くので、

$$\sum_{j=1}^{n-1} (2j - 1) = (n-1)^2,$$

これは最初の $n - 1$ 個の奇数の和である。どちらの公式も $12 = 4 \cdot 3$ および $16 = 4^2$ と一致する。

小問 (ii)

長さ N の棒が 3 本の中で最も長いので、選んだ 2 本の長さ $a < b$ が $a + b > N$ を満たすとき、かつそのときに限り、3 本の棒は面積 0 でない三角形をつくる。（$a + N > b$ のような残り 2 つの三角不等式（triangle inequality）は、$N > b$ なので自動的に成り立つ。）したがって、条件を満たす選び方は、ちょうど小問 (i) で $n_3 = N$ として数えた組である。

2 本の棒は残りの $N - 1$ 本から選ぶので、同様に確からしい選び方は $\binom{N-1}{2}$ 通りある。

$N = 2n + 1$ のとき：選び方は $\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ 通りなので、

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{n(n-1)}{n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1},$$

となり、示すべき結果が得られた。

$N = 2n$ のとき：選び方は $\binom{2n-1}{2} = (2n-1)(n-1)$ 通りである。これが 0 でないためには $n \geq 2$ が必要である（$N = 2$ のときは他の棒が 1 本しかないので、2 本を選ぶことはできない）。このとき

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{(n-1)^2}{(2n-1)(n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

N が 1 小さいにもかかわらず、答えが奇数の場合と同じ式になるのはかなり意外である。

小問 (iii)

相異なる 3 本の棒には必ず最長のものがあり、その長さを m とすると $3 \leq m \leq 2M+1$ である。この選び方が三角形をつくるのは、残り 2 本の長さが小問 (i) で $n_3 = m$ として数えた組の 1 つになるとき、かつそのときに限る。条件を満たす選び方はそれぞれ最長の棒のもとでちょうど 1 回ずつ数えられるので、条件を満たす選び方の総数は

$$T = \sum_{m=2}^{2M+1} c(m),$$

である。ここで $c(m)$ は小問 (i) で求めた個数である。（$c(2) = 0$ なので、$m = 2$ を含めても差し支えない。）

> **考えてみよう** $c(m)$ は m が奇数か偶数かで式が異なるが、どうすれば和をとれるだろうか？

2 つずつ組にすればよい。各 $n = 1, \ldots, M$ について、偶数の値 $m = 2n$ と奇数の値 $m = 2n+1$ をまとめて扱う。これらを合わせると、$m = 2, 3, \ldots, 2M+1$ をちょうど 1 回ずつ尽くす。それらの寄与の合計は

$$(n-1)^2 + n(n-1) = (n-1)(2n-1) = 2n^2 - 3n + 1.$$

与えられた $\sum k^2$ の公式と $\sum k = \frac{1}{2}M(M+1)$ を用いると、

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{M} \left(2n^2 - 3n + 1\right) \\ &= \tfrac{1}{3}M(M+1)(2M+1) - \tfrac{3}{2}M(M+1) + M \\ &= \tfrac{1}{6}M\left[2(2M^2+3M+1) - 9(M+1) + 6\right] \\ &= \tfrac{1}{6}M\left(4M^2 - 3M - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{6}M(4M+1)(M-1). \end{aligned}$$

3 本の棒の同様に確からしい選び方の総数は

$$\binom{2M+1}{3} = \frac{(2M+1)(2M)(2M-1)}{6}.$$

割り算をして $M/6$ を約分すると、

$$\mathrm{P}(\text{三角形}) = \frac{M(4M+1)(M-1)}{2M(2M+1)(2M-1)} = \frac{(4M+1)(M-1)}{2(2M+1)(2M-1)},$$

となり、示すべき結果が得られた。

検算

- $M = 1$：棒は 1, 2, 3 であり、$1 + 2 = 3$ なので退化した三角形（degenerate triangle）になる。よって確率は 0 になるはずであり、公式も 0 を与える。
- $M = 2$：棒は 1 から 5 まで。三角形になるのは $\{2,3,4\}$、$\{2,4,5\}$、$\{3,4,5\}$ なので、確率は 3/10 である。公式は $\frac{9\cdot1}{2\cdot5\cdot3} = \frac{3}{10}$ を与える。
- $M \to \infty$ のとき、確率は $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ に収束（converge）する。これは連続版と一致する：$[0,1]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従う独立な 3 つの長さについて、小さい 2 つの和が最大のものより大きくなる確率は $\frac{1}{2}$ である。
- 小問 (i) のすべての個数と小問 (ii)、(iii) の確率は、すべての組や 3 つ組を直接列挙するコンピュータによる検証で、n は 39 まで、M は 19 まで確認した（たとえば $M = 3$ では 13/35 となる）。

よくある間違い

- $n_1 + n_2 = n_3$ を許してしまうこと：長さ 2, 3, 5 の 3 本の棒は一直線に重なって面積が 0 になるので、不等式は等号を含まないものでなければならない。
- 小問 (ii) で、$\binom{N-1}{2}$ の代わりに $\binom{N}{2}$ を用いてしまうこと：長さ N の棒はすでに取られている。
- 小問 (iii) で、m の奇数の値だけ（あるいは偶数の値だけ）について和をとってしまうこと：最長の棒の長さは 3 から $2M+1$ までのどの値もとりうる。

STEP のその先へ

最大の要素によって数え上げを場合分けし、それから和をとるというのは、組合せ論（combinatorics）における標準的な手法である。同じ考え方で、最大値の値について積

分すれば、連続版の答え $\frac{1}{2}$ が得られる。図のように領域内の格子点（lattice points）を数え、それをその領域の面積と比べることは、離散確率と連続確率をつなぐ架け橋である。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、古典的な「折れた棒（broken stick）」の三角形問題をはじめ、この種の問題が数多く収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。