解答例

STEP II 2019、第 10 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 2019、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

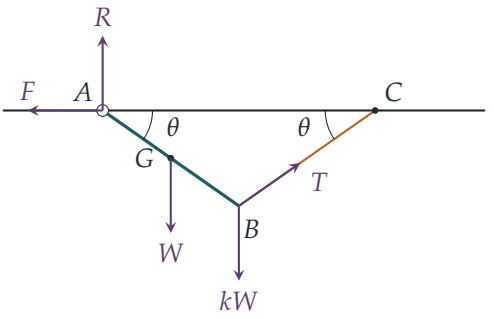
鍵となる考え方

$AB = BC = 2a$ であり、A と C はともにレール上にあるので、三角形 ABC は二等辺三角形（isosceles triangle）である。したがって、糸もレールと角 θ をなす。この幾何的な事実を押さえれば、あとは剛体（rigid body）のつりあい（equilibrium）の標準的な問題である。A のまわりの力のモーメント（moment）を考えれば、輪にはたらく未知の力を含めずに張力（tension）が求まり、続いて力を分解すれば垂直抗力（normal reaction）と摩擦力（friction）が求まる。最後の小問では k に関する二つのしきい値を比較する。k を大きくしていくとき、どちらに先に達するだろうか。

解答

モデルと力。 棒は一様な剛体であるから、その重さ W は中点 G にはたらき、$AG = a$ である。輪は軽いので、レールが輪に及ぼす力はそのまま A において棒に伝わる。すなわち、鉛直上向きの垂直抗力 R と、レールに沿った摩擦力 F である。糸は軽くて伸びず、その張力 T は B において BC に沿ってはたらく。追加の荷重 kW は B において鉛直下向きにはたらく。

三角形 ABC において辺 AB と BC はともに $2a$ であるから、A と C における底角は等しい。すなわち、糸はレールと角 θ をなす。水平方向に見ると、B は A から $2a\cos\theta$、C は A から $4a\cos\theta$ の距離にある。



F はレールに沿って C から遠ざかる向きにはたらくものとする。糸が棒を C の方へ引くので、実際にそうでなければならないことが後でわかる。

小問 (i)

A のまわりのモーメントを考えると、R と F が消える。重さと荷重の腕の長さはそれぞれ $a\cos\theta$ と $2a\cos\theta$ である。張力については、B において水平成分 $T\cos\theta$（C の向き）と鉛直上向きの成分 $T\sin\theta$ に分ける。鉛直成分の腕の長さは $2a\cos\theta$、水平成分の腕の長さは $2a\sin\theta$（レールから B までの深さ）であり、どちらも棒を同じ向き、すなわち図において反時計回りに回そうとする。よって

$$T\sin\theta\cdot 2a\cos\theta + T\cos\theta\cdot 2a\sin\theta = W\cdot a\cos\theta + kW\cdot 2a\cos\theta,$$
$$4aT\sin\theta\cos\theta = aW(1+2k)\cos\theta.$$

$0 < \theta < 90^\circ$ のとき $\cos\theta \neq 0$ であるから、$a\cos\theta$ で割ることができて

$$T = \frac{(2k+1)W}{4\sin\theta}.$$

これは、輪が滑らない限り、輪の状態によらず成り立つ。糸が切れるのは $T > W$ のとき、すなわち（$4\sin\theta > 0$ を掛けて）$(2k+1)W > 4W\sin\theta$ のときであり、これは

$$2k+1 > 4\sin\theta,$$

となる。以上で示された。

小問 (ii)

棒全体について力を分解する。鉛直方向には

$$R + T\sin\theta = W + kW \quad\Longrightarrow\quad R = (1+k)W - \frac{(2k+1)W}{4} = \frac{(2k+3)W}{4}.$$

水平方向にはたらく力は F と張力の水平成分だけであるから

$$F = T\cos\theta = \frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta}.$$

これは正であり、摩擦力が C から遠ざかる向きにはたらくことが確かめられた。また $R > 0$ であるから、輪は確かに上からレールに押しつけられている。

> **考えてみよう** 粗いレール上の輪は、正確にはどのようなときに滑るのだろうか。

摩擦力は最大でも μR までしか生じない。つりあいに $F > \mu R$ が必要であれば、摩擦力は輪を支えきれず、輪は滑る。よって輪が滑るのは

$$\frac{(2k+1)W\cos\theta}{4\sin\theta} > \mu\,\frac{(2k+3)W}{4}.$$

のときである。$4\sin\theta/(W\cos\theta) > 0$ を掛けると

$$2k+1 > (2k+3)\mu\tan\theta,$$

となる。以上で示された。

小問 (iii)

$t = \tan\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。どちらの条件も、k があるしきい値を超えたことを表している。

糸について。 小問 (i) より、糸は $2k+1 > 4s$ となったとき、すなわち

$$k > k_{\text{break}} = \frac{4s-1}{2}.$$

となったときに切れる。

輪について。 小問 (ii) の条件を変形すると

$$2k+1 > (2k+3)\mu t \iff 2k(1-\mu t) > 3\mu t - 1.$$

ここで $\mu t < 1$ を用いる。$2(1-\mu t) > 0$ で割っても不等号の向きは変わらないので、輪は

$$k > k_{\text{slip}} = \frac{3\mu t - 1}{2(1-\mu t)}.$$

となったときに滑る。（$\mu t < 1$ でなければ輪は決して滑らない。$\mu t \geq 1$ ならば、すべての k に対して $(2k+3)\mu t \geq 2k+3 > 2k+1$ となるからである。この条件が与えられているのはそのためである。）

k を 0 から増やしていくと、低い方のしきい値が先に超えられる。よって、糸が切れ

る前に輪が滑るのは、ちょうど $k_{\text{slip}} < k_{\text{break}}$ のときである。まず $1-\mu t > 0$ を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{3\mu t-1}{1-\mu t} < 4s-1 &\iff 3\mu t-1 < (4s-1)(1-\mu t)\\ &\iff 3\mu t-1 < 4s-1-4s\mu t+\mu t\\ &\iff 2\mu t+4s\mu t < 4s\\ &\iff \mu t(1+2s) < 2s\\ &\iff \mu < \frac{2\sin\theta}{\tan\theta\,(1+2\sin\theta)} = \frac{2\cos\theta}{1+2\sin\theta},\end{aligned}$$

を得る。最後の段階では $t(1+2s) > 0$ で割った。これが求める条件である。

棒ははじめつりあっているので、$k = 0$ ではどちらのしきい値もまだ超えられていない。また、どちらの条件も「k がある値より大きい」という形であるから、各しきい値は一度しか超えられない。したがって、二つのしきい値を比較すれば、どちらが先に起こるかが確かに決まる。

検算

- 代わりに B のまわりのモーメントを考えても同じ答えが得られる。A にはたらく力の B のまわりのモーメントは $R\cdot 2a\cos\theta - F\cdot 2a\sin\theta$、重さのモーメントは $Wa\cos\theta$ である。R と F の値を代入すると $\frac{1}{2}(2k+3)Wa\cos\theta - \frac{1}{2}(2k+1)Wa\cos\theta = Wa\cos\theta$ となり、重さのモーメントとちょうどつりあう。
- $\theta = 30^\circ$ とする。このとき $k_{\text{break}} = \frac{1}{2}$ であり、臨界の摩擦係数（coefficient of friction）は $2\cos 30^\circ/(1+2\sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ であるから、$\mu t = 0.866 \times 0.577 = \frac{1}{2}$ となる。この μ のもとでは $k_{\text{slip}} = \frac{3/2-1}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ でもあり、境界では当然そうなるべきとおり、二つのしきい値は一致する。
- 多数のランダムな θ と k について、すべての力とモーメントがつりあうことをコンピュータで確認した。また、ランダムな θ と μ について k を少しずつ増やしていったところ、輪が先に滑るのはちょうど $\mu < 2\cos\theta/(1+2\sin\theta)$ のときであった。

よくある間違い

- A のまわりのモーメントで張力の水平成分を忘れる。その腕の長さは $2a\sin\theta$ であり、張力のモーメントを 2 倍にする。$4\sin\theta$ の 4 はここから来ている。
- $R = (1+k)W$ としてしまう。糸が重さの一部を支えているので、垂直抗力は全荷重より小さい。

▶ $1-\mu\tan\theta$ が正であることを述べずに、それで割る。与えられた条件 $\mu\tan\theta<1$ はまさにそのためにある。

STEP のその先へ

これは静定（statically determinate）な問題である。未知数は三つ（T、R、F）であり、平面内の剛体に対するつりあいの式も三つある。小問 (iii) は、各拘束が破れる荷重を比較するという、このような構造物が壊れる典型的な仕方を示している。技術者も、構造物のどの部材が最初に壊れるかという同じ問いを立てる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とトルクを丁寧に扱い、さらに回転の力学へと進んでいる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。