解答例

# STEP II 2019、第 1 問

純粋数学 • 3 次関数の接線

**STEP II 2019、問 1**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

$x = a$ における接線(tangent)が $(p, 0)$ を通るための条件を書き下し、$f(x) = (x - p)g(x)$ を代入する。するとほとんどの項が打ち消し合い、$g'(a)$ の定数倍だけが残る。したがって三次関数（cubic）の場合、根 $p$ から引いた接線は、もう一方の二次の因数が停留する（stationary）点で曲線に接する。その点は残り二つの根のちょうど中点である。小問 (ii) は結局、二つの傾き（gradient）の比較に帰着する。さらに、接線と三次曲線の交点を求める方程式の因数分解も必要になるが、この方程式は接点で必ず重解をもつ。

## 解答

### 最初の結果

$x = a$ における接線は $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ である。積の微分法（product rule）により $f'(x) = g(x) + (x - p)g'(x)$ である。接線が $(p, 0)$ を通るのは、ちょうど次が成り立つときである。

$$\begin{aligned} 0 &= f(a) + f'(a)(p - a) \\ &= (a - p)g(a) + [g(a) + (a - p)g'(a)](p - a) \\ &= (a - p)g(a) - (a - p)g(a) - (a - p)^2 g'(a) \\ &= -(a - p)^2 g'(a). \end{aligned}$$

$a \neq p$ より因数 $(a - p)^2$ は 0 でないから、これが成り立つのは $g'(a) = 0$ のとき、かつそのときに限る。これで両方向の主張が同時に証明された。

### 小問 (i)

ここでは $f(x) = (x-p)g(x)$、$g(x) = A(x-q)(x-r) = A(x^2-(q+r)x+qr)$ であるから、$g'(x) = A(2x-(q+r))$ である。最初の結果と $A \neq 0$ より

$$g'(a) = 0 \iff 2a = q+r.$$

($a = \frac{1}{2}(q+r) > q > p$ であるから、要求どおり $a \neq p$ となることに注意する。)

傾きについては、$g'(a) = 0$ であるから $f'(a) = g(a) + (a-p)g'(a) = g(a)$ である。$a-q = \frac{1}{2}(r-q)$、$a-r = -\frac{1}{2}(r-q)$ を用いると

$$f'(a) = A \cdot \tfrac{1}{2}(r-q) \cdot (-\tfrac{1}{2}(r-q)) = -\frac{A(r-q)^2}{4}.$$

### 小問 (ii)

今度は代わりに根 $r$ をくくり出す。$f(x) = (x-r)h(x)$、$h(x) = A(x-p)(x-q)$ とする。最初の結果は $p$ の代わりに $r$ としても成り立つ（その証明では、どの根を選んだかを一切使っていない)。よって $x = c$ における接線が $(r,0)$ を通るのは $h'(c) = 0$、すなわち $c = \frac{1}{2}(p+q)$ のとき、かつそのときに限る。小問 (i) とまったく同様に、その傾きは

$$f'(c) = h(c) = A \cdot \tfrac{1}{2}(q-p) \cdot (-\tfrac{1}{2}(q-p)) = -\frac{A(q-p)^2}{4}.$$

したがって $A \neq 0$ より

$$\text{接線が平行} \iff (r-q)^2 = (q-p)^2 \iff r-q = q-p \iff q = \tfrac{1}{2}(p+r),$$

ここで中央の段階では $r-q > 0$ かつ $q-p > 0$ を用いており、そのため正の平方根をとってよい。

> **考えてみよう** 三次方程式を解かずに、接線が三次曲線と再び交わる点をどのように求めればよいか。

根の一つはすでにわかっており、しかもそれは二重に数えられる。接点（point of contact）である。$x = q$ における傾きは $f'(q) = A(q-p)(q-r)$ であり（積の微分法の残り二つの項は $x-q$ を含むので消える)、$f(q) = 0$ であるから、そこでの接線は $y = A(q-p)(q-r)(x-q)$ である。これが曲線と交わるのは

$$A(x-p)(x-q)(x-r) = A(q-p)(q-r)(x-q).$$

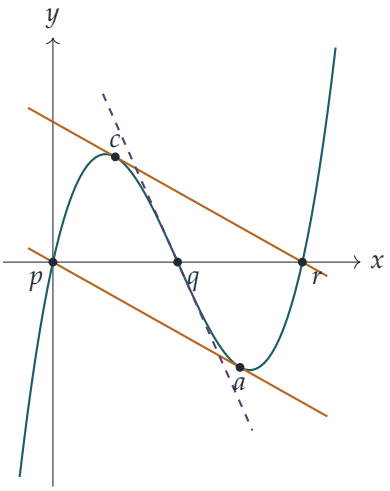
のときである。$A \neq 0$ で割り、因数 $x-q$ をくくり出すと

$$\begin{aligned} 0 &= (x-q)[(x-p)(x-r) - (q-p)(q-r)] \\ &= (x-q)[x^2 - q^2 - (p+r)(x-q)] \\ &= (x-q)^2(x+q-p-r). \end{aligned}$$

よって接線は $x = q$（接点であるから予想どおり重解（double root））と $x = p + r - q$ で曲線と交わり、それ以外では交わらない。接線が曲線と再び交わらないのは、この第三の根が $q$ と一致するとき、かつそのときに限る。

$$p + r - q = q \iff q = \tfrac{1}{2}(p + r).$$

これは先ほどと同じ条件である。したがって、小問 (i) と (ii) の接線が平行であるのは、$x = q$ における接線が曲線と再び交わらないとき、かつそのときに限る。




この図は $q = \frac{1}{2}(p + r)$ の場合を示している。二本の接線（琥珀色）は平行であり、$q$ における接線（破線）はそこで曲線を横切るが、ほかのどこでも曲線と交わらない。このとき $q$ は変曲点（point of inflection）だからである。

## 検算

- $p = 0$、$q = 1$、$r = 2$、$A = 3$ とすると $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$ である。このとき $f'(x) = 9x^2 - 18x + 6$ より $f'(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$、$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ となり、どちらも $-A(r-q)^2/4 = -A(q-p)^2/4 = -\frac{3}{4}$ に等しい。よって接線は平行であり、$q$ が $p$ と $r$ の中点であることから予想されるとおりである。
- $x = \frac{3}{2}$ における接線は $y = -\frac{9}{8} - \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})$ であり、これは $x = 0$ で 0 となる。確かに $(p, 0)$ を通る。
- 上の恒等式はすべて、$p < q < r$ と $A$ をランダムに約二千通り選び、コンピュータによる厳密な計算でも確認した。

## よくある間違い

- $(a-p)^2$ で割れるのは $a \neq p$ だからであることを忘れる。この条件がなければ「限る」の方向は成り立たない。$p$ そのものにおける接線は常に $(p,0)$ を通るからである。
- 負の根が除外される理由を述べずに $(r-q)^2 = (q-p)^2 \Rightarrow r-q = q-p$ と書く。
- 接点における既知の重解を利用せず、交点を求める三次方程式を一から解こうとする。

## STEP のその先へ

$x = q$ における接線が特別なのは、このとき $q$ が変曲点、すなわち三次曲線の対称の中心だからである。どの三次曲線もその変曲点のまわりの半回転について対称であり、二本の接線が平行になるのはそのためである。ここで扱った接線と弦の作図は、三次曲線の幾何学への第一歩である。そこでは、直線と三次曲線の第三の交点を用いて曲線上の点の間に加法を定義する（楕円曲線（elliptic curves））。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（大学入試レベルの発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。