解答例

STEP I 2019、第 9 問

力学 ・ 転倒と摩擦

STEP I 2019、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

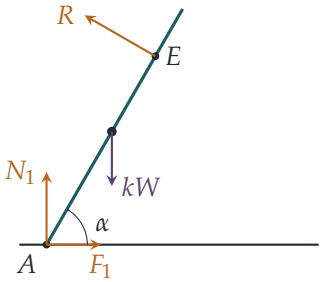
www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

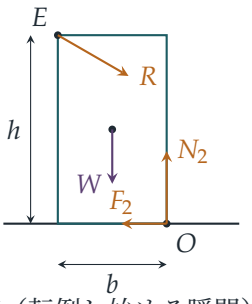
はしごと箱を、1 つの力で結ばれた 2 つの別々の物体として扱う。接触がなめらか（smooth）なので、その力ははしごに垂直であり、作用線は α によって決まり、未知なのは大きさだけである。はしごについてその下端のまわりのモーメント（moment）を考えると力の大きさが求まり、箱についてそれが傾くときの回転軸となる辺のまわりのモーメントを考えると転倒（toppling）の条件が得られる。関係式 $h = b\tan\alpha$ は、箱のモーメントを 2 倍角の式にまとめるために与えられている。

解答

箱を一様な剛体（rigid body）の直方体、はしごを軽い棒、塗装工を質点（particle）としてモデル化する。はしごと箱の接触はなめらかであり、地面との接触はどちらもあらい（rough）。はしごが触れている箱の辺を E、はしごの下端を A、箱の下側の辺のうちはしごから遠い方（箱が傾くときの回転軸となる辺）を O とする。



はしご



箱（転倒し始める瞬間）

小問 (i)

E には摩擦（friction）がないので、箱がはしごに及ぼす力 R ははしごに垂直である。E は高さ h にあるので、はしごに沿って $AE = h/\sin\alpha$ である。塗装工が高さ λh にいるとき、塗装工ははしごに沿って $\lambda h/\sin\alpha$ の位置にいるので、A からの水平距離は $\lambda h\cot\alpha$ である。

はしごは軽いので、A のまわりのモーメントを生じるのは R と塗装工の重さだけである（N_1 と F_1 は A に作用する）。R は AE に垂直なので、その腕の長さは AE そのものである：

$$R\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = kW\cdot\lambda h\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad\Longrightarrow\quad R = k\lambda W\cos\alpha,$$

となり、示された。（厳密には、λh を塗装工のその時点の高さとすれば、この式は登っている途中のどの段階でも成り立つ。）

小問 (ii)

ニュートン（Newton）の第 3 法則（作用・反作用の法則）により、はしごは E において、はしごに垂直で箱の内側へ向かう大きさ R の力で箱を押す。その成分は、水平方向に $R\sin\alpha$（はしごから離れる向き、すなわち O の側へ）、鉛直下向きに $R\cos\alpha$ である。

箱が O のまわりに転倒し始める瞬間には、地面からの抗力はすべて O に作用するので、N_2 と F_2 は O のまわりのモーメントをもたない。O のまわりのモーメントを、時計回り（箱が傾く向き）を正として考える。E は O から水平距離 b、高さ h の位置にあるので、

- 高さ h に作用する水平成分 $R\sin\alpha$ のモーメントは $+Rh\sin\alpha$；
- O からはしご側へ距離 b の位置に作用する鉛直成分 $R\cos\alpha$ のモーメントは $-Rb\cos\alpha$（その側を下に押すことは傾きを妨げる）；
- O から距離 $\frac{1}{2}b$ の位置に作用する重さ W のモーメントは $-\frac{1}{2}Wb$

である。モーメントの合計が 0 に達したとき、箱は転倒し始める：

$$R(h\sin\alpha - b\cos\alpha) = \tfrac{1}{2}Wb.$$

考えてみよう ここで $h = b\tan\alpha$ はどのように役立つか？

これを代入すると、

$$h\sin\alpha - b\cos\alpha = b\,\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

小問 (i) の $R = k\lambda W\cos\alpha$ を用いると、条件は

$$-k\lambda W\cos\alpha\cdot\frac{b\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}Wb \quad\Longrightarrow\quad 2k\lambda\cos 2\alpha + 1 = 0,$$

となり、示された。これには $\cos 2\alpha < 0$、すなわち $\alpha > 45^\circ$ が必要であることに注意しよう。これは $h > b$ と一致する。

小問 (iii)

箱について力を分解する（地面からの抗力は、はしご側へ向かう成分 F_2 と上向きの成分 N_2 をもつ）：

$$F_2 = R\sin\alpha, \qquad N_2 = W + R\cos\alpha.$$

箱はすべらないので $F_2 \le \mu N_2$、すなわち $\mu \ge \dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha}$ である。

> **考えてみよう** 登っている途中のどの瞬間に、この条件を満たすのが最も難しくなるか？

比 $\dfrac{R\sin\alpha}{W + R\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{W/R + \cos\alpha}$ は R について増加し、R は塗装工が登るにつれて大きくなる。したがって、摩擦に対する要求が最も大きくなるのは転倒の瞬間であり、そこで不等式が成り立つ必要がある。(ii) より $k\lambda = -\dfrac{1}{2\cos 2\alpha}$ なので、

$$R = -\frac{W\cos\alpha}{2\cos 2\alpha}.$$

すると

$$R\sin\alpha = -\frac{W\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha} = -\frac{W\sin 2\alpha}{4\cos 2\alpha},$$

$$W + R\cos\alpha = W\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{2\cos 2\alpha}\right) = W\,\frac{4\cos 2\alpha - (1+\cos 2\alpha)}{4\cos 2\alpha} = W\,\frac{3\cos 2\alpha - 1}{4\cos 2\alpha},$$

となる。ここで $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$ を用いた。割り算をすると、

$$\mu \ge \frac{-\sin 2\alpha}{3\cos 2\alpha - 1} = \frac{\sin 2\alpha}{1 - 3\cos 2\alpha},$$

となり、示された。$45^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $\sin 2\alpha > 0$ かつ $\cos 2\alpha < 0$ なので、分子も分母も正である。

検算

- $\alpha = 60^\circ$ とすると $\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$ である。小問 (ii) より $k\lambda = 1$ なので $R = \frac{1}{2}W$。すると $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}W$、$N_2 = \frac{5}{4}W$ となり、$\mu \ge \frac{\sqrt{3}}{5} \approx 0.346$ を得る。これは $\sin 120^\circ / (1 - 3\cos 120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}\big/\frac{5}{2}$ と一致する。

- $\alpha \to 45°$（幅よりわずかに高いだけの、立方体に近い箱）のとき、$\cos 2\alpha \to 0$ となり、(ii) は $k\lambda \to \infty$ を要求する。E での押す力はほぼ直線 EO に沿っているので、回転させる効果をほとんどもたない。これは図形的な状況とも合っている。$h = b\tan\alpha$ のとき、α が $45°$ に近ければ、E を通る R の作用線はほぼ O を通る。
- モーメントの式、転倒する高さ、摩擦の下限は、α、b、k、W を無作為に多数選んで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- E での力を（なめらかな壁の場合のように）水平とみなしてしまう。ここでの接触は辺との接触なので、力ははしごに垂直である。
- R の鉛直成分が箱の垂直抗力（normal reaction）に加わることを忘れてしまう。$N_2 = W + R\cos\alpha$ であり、W ではない。
- 箱の下側の辺のうち、間違った方のまわりでモーメントを考えてしまう。箱ははしごから遠い方の辺のまわりに傾く。

STEP のその先へ

これは 2 物体の静力学（statics）である。各物体を切り離して考え、接触点でニュートンの第 3 法則を用い、未知数が消えるようにモーメントの中心を選ぶ。物体がまずすべるのか転倒するのか、また荷重が増えるにつれてどの拘束が最初に破れるのか、という問いは、工学の力学や接触する剛体の研究全体に通じている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学と摩擦をこうした精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。