解答例

STEP I 2019、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 2019、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

f を具体的に計算してはならないと指示されているので、どの小問も、積分を**変形してある**上端 X に対して

$$\int_1^X \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(X)$$

とちょうど同じ形にすることが目標である。ほとんどの作業は二つの操作でまかなえる。一つは**拡大**（stretch）$(u = kt)$ であり、これにより $\frac{u-k}{u+k}$ が $\frac{t-1}{t+1}$ に変わる。もう一つは**平行移動**（shift）$(u = t + c)$ であり、これにより分数の中の二つの数が 0 に関して対称になる。最後の小問では、商の平方根を適切な形の関数に変えるために、もう一つ置換が必要になる。

解答

以下では一貫して、置換（substitution）によって被積分関数（integrand）、微分および積分区間の端点がすべて変わるという事実を用いる。答えが現れるのは上端である。

小問 (i)

被積分関数 $\sqrt{\frac{u-2}{u+2}}$ は、$u = 2t$ とおけば $\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$ になる。実際、このとき $\frac{2t-2}{2t+2} = \frac{t-1}{t+1}$ である。$\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t$ であり、端点は $u = 2 \mapsto t = 1$、$u = x \mapsto t = \frac{1}{2}x$ となるから、

$$\int_2^x \sqrt{\frac{u-2}{u+2}}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x/2} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,2\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x).$$

条件 $x > 2$ はまさに $\frac{1}{2}x > 1$ を保証するものであり、したがって $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ は定義される。これが求める結果である。

小問 (ii)

ここでは分数の中の数は 0 と -4 であり、0 に関して対称ではない。その中点は -2 なので、2 だけ平行移動する。すなわち $u = v - 2$ とおく。すると $\frac{u}{u+4} = \frac{v-2}{v+2}$、$\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$ であり、端点 $u = 0, x$ は $v = 2, x+2$ になる。あとは小問 (i) を x の代わりに $x+2$（これは 2 より大きい）として用いれば完了する：

$$\int_0^x \sqrt{\frac{u}{u+4}}\,\mathrm{d}u = \int_2^{x+2} \sqrt{\frac{v-2}{v+2}}\,\mathrm{d}v = 2\,\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}x+1).$$

小問 (iii)

分数の中の数は 5 と -1 であり、その中点は 2 である。そこで $u = v+2$ とおくと、

$$\frac{u-5}{u+1} = \frac{v-3}{v+3},$$

となり、端点 $u = 5, x$ は $v = 3, x-2$ になる。次に 3 倍の拡大を行い、$v = 3t$ とおく。すると $\frac{v-3}{v+3} = \frac{t-1}{t+1}$、$\mathrm{d}v = 3\,\mathrm{d}t$ であり、端点は $t = 1, \frac{1}{3}(x-2)$ となる：

$$\begin{aligned}\int_5^x \sqrt{\frac{u-5}{u+1}}\,\mathrm{d}u = \int_3^{x-2} \sqrt{\frac{v-3}{v+3}}\,\mathrm{d}v &= \int_1^{(x-2)/3} \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,3\,\mathrm{d}t \\ &= 3\,\mathrm{f}\Big(\frac{x-2}{3}\Big).\end{aligned}$$

$x > 5$ であるから、引数 $\frac{x-2}{3}$ は 1 より大きく、当然そうでなければならない。（二つの置換を合わせると、一つの置換 $u = 3t+2$ になる。）

小問 (iv)

この被積分関数には商の平方根は見当たらず、しかも次数が合っていない。分子は u^2、根号の中は u^2+4 である。

> **考えてみよう** どのような置換をすれば、u^2+4 を小問 (ii) の $u+4$ に変えられるだろうか？

$u^2 = w$ とおく。すると $u = \sqrt{w}$（$[1,2]$ 上で $u > 0$ である）であり、$\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}}$ となる。端点 $u = 1, 2$ は $w = 1, 4$ になり、

$$\frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{w}{\sqrt{w+4}} \cdot \frac{\mathrm{d}w}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w+4}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w,$$

となる。これはちょうど小問 (ii) の被積分関数である。積分区間を 0 で分け、小問 (ii)

を二回（$x=4$ と $x=1$ として）用いると、

$$\int_1^2 \frac{u^2}{\sqrt{u^2+4}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\int_0^4 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w - \int_0^1 \sqrt{\frac{w}{w+4}}\,\mathrm{d}w\right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(2\,\mathrm{f}(3) - 2\,\mathrm{f}(\tfrac{3}{2})\Big) = \mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(\tfrac{3}{2}).$$

検算

- どの答えも下端で正しい振る舞いをする。(i) では $x=2$ のとき $2\,\mathrm{f}(1)=0$、(ii) では $x=0$ のとき $2\,\mathrm{f}(1)=0$、(iii) では $x=5$ のとき $3\,\mathrm{f}(1)=0$ となる。
- 微分してみるのが手早い確認法である。(iii) については $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3\,\mathrm{f}\big(\frac{x-2}{3}\big) = \mathrm{f}'\big(\frac{x-2}{3}\big) = \sqrt{\frac{x-5}{x+1}}$ となり、確かにそうなるべき形である。
- 数値的には、(iv) の両辺はともに 0.91007 に等しく、(iii) で $x=11$ とすると両辺はともに 3.19704 に等しい。いずれも直接の数値積分によって求めたものである。

よくある間違い

- $\mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}t$ から出る係数を忘れ、$2\,\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ ではなく $\mathrm{f}(\frac{1}{2}x)$ としてしまう。
- 被積分関数は変えたのに端点を変えない。特に上端は答えが現れる場所なので要注意である。
- (iv) で結果を $\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{f}(3)$ だけと書いてしまう。小問 (ii) が与えるのは 0 からの積分なので、0 から 1 までの部分を引かなければならない。

STEP のその先へ

ここでの考え方は、一群の積分が実は、異なるアフィン変数変換（affine change of variable）$u=at+b$ を通して見た一つの積分にすぎない、ということである。式の中に隠れた「標準形」を見抜く力は、大学の解析学においても、微分方程式を標準形に帰着させる際にも、絶えず使われる技能である。（実は関数 f は双曲線関数（hyperbolic functions）を用いて閉じた形で求めることができるが、この問題は、それなしでもかなりのところまで進めることを示している。）置換と積分の厳密な理論については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、この種の問題をさらに多く解くには Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的数学問題集）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。