解答例

STEP I 2019、第 6 問

純粋数学 • 不等式と評価

> **STEP I 2019、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの方程式も直接解こうとすると見通しが立たないが、「何か = 別の何か」の形に分けることができ、しかも左辺はある数より小さくなることがなく、右辺は同じ数より大きくなることがない。このとき方程式が成り立つのは、**両辺**がちょうどその数に一致するときに限られ、それぞれの条件は容易に解ける。各小問の前半は、この二つの評価（bound）を準備するためにある。

解答

小問 (i)

平方完成（completing the square）すると、

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x\cos\theta + 4 &= (3x - 2\cos\theta)^2 - 4\cos^2\theta + 4 \\ &= (3x - 2\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta. \end{aligned}$$

平方は負にならないので、最小値は $4\sin^2\theta$ であり、これをとるのはちょうど $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ のときである。

この 4 次式（quartic）を x^2 の 2 次式とみなすと、

$$12x^2\sin\theta - 9x^4 = -(3x^2 - 2\sin\theta)^2 + 4\sin^2\theta.$$

よって $12x^2\sin\theta - 9x^4 \leq 4\sin^2\theta$ であり、等号が成り立つのはちょうど $x^2 = \frac{2}{3}\sin\theta$ のときである。$0 < \theta < \pi$ より $\sin\theta > 0$ なので、この x^2 の値は実際にとりうる。したがって最大値は $4\sin^2\theta$ である。

ここで、与えられた方程式の x^2 の項を $9x^2 - 12x^2\sin\theta$ と分けて整理すると、

$$\underbrace{9x^2 - 12x\cos\theta + 4}_{\geq 4\sin^2\theta} = \underbrace{12x^2\sin\theta - 9x^4}_{\leq 4\sin^2\theta}.$$

考えてみよう $4\sin^2\theta$ 以上の量と $4\sin^2\theta$ 以下の量が等しくなるのは、どのようなときか？

両方が $4\sin^2\theta$ に等しいときに限る。よって方程式が成り立つための必要十分条件は、**両方**

$$x = \tfrac{2}{3}\cos\theta \qquad \text{かつ} \qquad x^2 = \tfrac{2}{3}\sin\theta.$$

が成り立つことである。x を消去すると $\frac{4}{9}\cos^2\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$、すなわち $2\cos^2\theta = 3\sin\theta$、つまり $2 - 2\sin^2\theta = 3\sin\theta$ である。したがって

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) = 0.$$

$\sin\theta \neq -2$ なので $\sin\theta = \frac{1}{2}$ となり、$\theta = \frac{\pi}{6}$ または $\theta = \frac{5\pi}{6}$ である。このとき $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ より、それぞれ $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり、どちらの場合も $x^2 = \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sin\theta$ が確かに成り立つ。解は

$$(x,\theta) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{\pi}{6}\right) \quad \text{と} \quad (x,\theta) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{5\pi}{6}\right).$$

である。

小問 (ii)

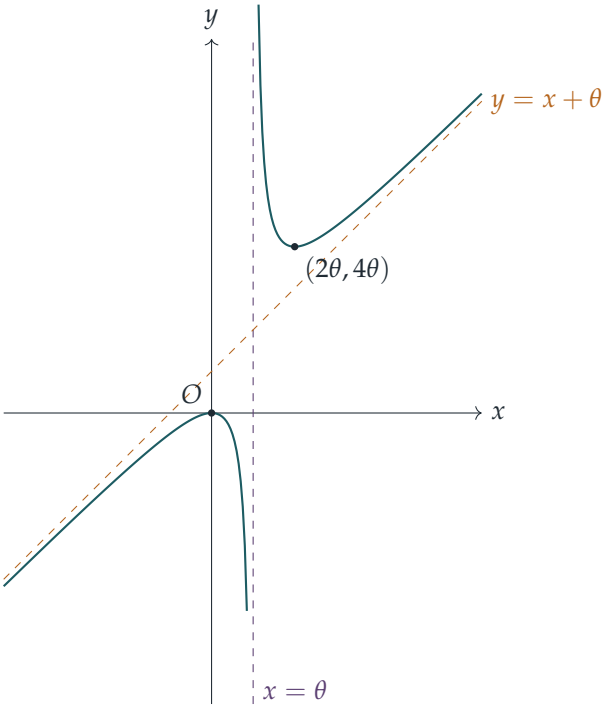
グラフの概形。ここでは $\theta > 0$ である。曲線 $y = \dfrac{x^2}{x-\theta}$ は原点を通り（それ以外では座標軸と交わらない）、垂直漸近線（vertical asymptote）$x = \theta$ をもつ。割り算を実行すると

$$\frac{x^2}{x-\theta} = x + \theta + \frac{\theta^2}{x-\theta},$$

となるので、$y = x + \theta$ は斜め漸近線（oblique asymptote）である。曲線は $x > \theta$ ではこの直線より上にあり、$x < \theta$ では下にある。商の微分法（quotient rule）で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x(x-\theta) - x^2}{(x-\theta)^2} = \frac{x(x-2\theta)}{(x-\theta)^2},$$

となるので、停留点（stationary point）は極大点（local maximum）$(0,0)$ と極小点（local minimum）$(2\theta, 4\theta)$ である（傾きの符号は $x = 0$ で $+$ から $-$ に、$x = 2\theta$ で $-$ から $+$ に変わる）。



そこから導かれること。$x<\theta$ のとき、分子は $x^2\geq 0$ で分母は負なので $y\leq 0$ である。$x>\theta$ のとき、この枝の最下点は $(2\theta,4\theta)$ なので $y\geq 4\theta$ である。代数的には、$x>\theta$ のとき

$$x^2-4\theta(x-\theta)=(x-2\theta)^2\geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{x-\theta}\geq 4\theta,$$

となる（正の量 $x-\theta$ で割った）。よって曲線が 0 と 4θ の間の値（両端を除く）をとることはない。

三角関数の評価。分子は $\sin^2\theta\cos^2 x\leq 1\cdot 1=1$ を満たし、分母は $1+\cos^2\theta\sin^2 x\geq 1$ を満たす。1 以下の数を 1 以上の（正の）数で割れば 1 以下である：

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2 x}{1+\cos^2\theta\sin^2 x}\leq 1.$$

等号成立には $\sin^2\theta\cos^2 x=1$ と $\cos^2\theta\sin^2 x=0$ の両方が必要である。また、この分数は平方を正の数で割ったものなので ≥ 0 であることにも注意する。

最後の方程式。$L=\dfrac{x^2}{4\theta(x-\theta)}$ とおき、右辺を R とする。先ほどの結果を $4\theta>0$ で割ると、$L\leq 0$ または $L\geq 1$ である。一方、$0\leq R\leq 1$ である。

考えてみよう ≤ 0 または ≥ 1 である数と、$[0,1]$ に属する数が一致しうるのはどこか？

0 か 1 に限る。よって $L = R = 0$ または $L = R = 1$ でなければならない。

- $L = 0$ ならば $x = 0$ となるが、このとき $0 < \theta < \pi$ より $R = \sin^2\theta > 0$ である。解はない。
- $L = 1$ は $x^2 = 4\theta(x - \theta)$、すなわち $(x - 2\theta)^2 = 0$ を意味するので、$x = 2\theta$ である。$R = 1$ には $\sin^2\theta\cos^2 x = 1$ が必要であり、これより $\sin^2\theta = 1$ かつ $\cos^2 x = 1$ となる。$0 < \theta < \pi$ のもとでは $\theta = \frac{\pi}{2}$ となり、$x = \pi$ である。実際、$\cos^2\pi = 1$ かつ $\cos^2\theta\sin^2 x = 0$ が成り立つ。

解は $x = \pi$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のみである。

検算

- $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$、$\theta = \frac{\pi}{6}$ を 4 次式に代入する：$9\cdot\frac{1}{9} + (9-6)\cdot\frac{1}{3} - 12\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 1 + 1 - 6 + 4 = 0$。
- 最後の方程式で $x = \pi$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ とすると：$L = \pi^2/(2\pi\cdot\frac{\pi}{2}) = 1$、$R = 1\cdot 1/(1+0) = 1$。
- (x,θ) の細かい格子上でコンピュータ探索を行ったところ、どちらの方程式についても他に解に近いものは見つからなかった。ただし、除外された端点 $\theta \to 0$ と $\theta \to \pi$ の付近では見かけ上の解が紛れ込む（そこでは $\sin\theta \to 0$ となり、評価が崩れる）。

よくある間違い

- $\sin\theta = \frac{1}{2}$ を求めたところで止めてしまう。x は $x = \frac{2}{3}\cos\theta$ を満たさなければならず、これが各 θ に対して x の**符号**を決めるので、$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5\pi}{6})$ は解ではない。
- 最後の小問で $L = R = 0$ の場合を忘れる。この場合は除外しなければならず、除外できるのは $\sin\theta \neq 0$ だからにほかならない。
- 分母がそれを損なわない理由を述べずに、「$\sin^2$ と $\cos^2$ は 1 以下だから」分数は ≤ 1 であると主張する。

STEP のその先へ

方程式を、ただ一つの値で一致する下からの評価と上からの評価の間に挟み込むという技法は、解析学（analysis）の定番である。相加相乗平均の不等式（AM–GM）やコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz）で等号が成り立つ条件を証明す

るのもこの方法であり、はさみうちの原理（squeeze theorem）で極限を確定させるのもこの方法である。「この不等式で等号が成り立つのはいつか？」と問う習慣を身につけることが、しばしば解への最短経路となる。この方向の話をさらに知りたければ、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）や、Siklos による問題集 *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。