解答例

STEP I 2019、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP I 2019、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つのベクトル（vector）が等しいのは、成分（component）がすべて一致するときであり、かつそのときに限る。したがって、この問題に現れる幾何的な条件はどれも、p, q, r, s に関するいくつかの簡単な方程式に書き直せる。4 点が同一平面上にある（coplanar）という条件は、スカラー三重積（scalar triple product、3×3 の行列式）が 0 に等しいということである。条件を座標で書いてしまえば、各小問は短い代数計算で済む。

解答

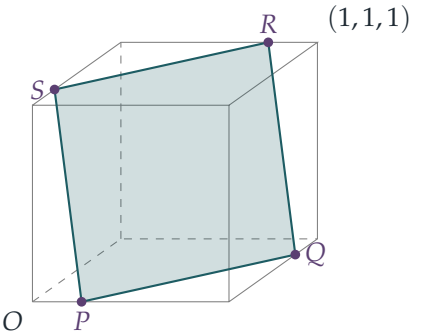
小問 (i)

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ ならば、向かい合う辺 PQ と SR は平行で長さが等しいので、$PQRS$ は**平行四辺形**（parallelogram）である。（このとき $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{SR}$ から $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ も得られる。）

さらに $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PS}|$ でもあれば、平行四辺形の隣り合う 2 辺が等しいので、4 辺すべてが等しい。すなわち $PQRS$ は**ひし形**（rhombus）である。

小問 (ii)：同一平面上にある条件

各点は単位立方体の辺上にあるので、$p, q, r, s \in [0, 1]$ である。ここで P と Q は面 $z = 0$ 上に、R と S は面 $z = 1$ 上にある。



4点が同一平面上にあるのは、$\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}$ が一次従属（linearly dependent）であるとき、すなわちこれらのスカラー三重積が0であるときであり、かつそのときに限る。

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -p \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} r-p \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

とおき、行列式（determinant）を第1行に沿って展開すると

$$\begin{vmatrix} 1-p & q & 0 \\ -p & s & 1 \\ r-p & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-p)(s-1) - q(-p-(r-p)) + 0$$
$$= (1-p)(s-1) + qr.$$

これを0とおくと $rq = (1-s)(1-p)$ となり、示すべき式が得られる。

行列式を使いたくなければ、P, Q, R を通る平面を $\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} + \mu\overrightarrow{PR}$ と表せばよい。その上の点は

$$(p + \lambda(1-p) + \mu(r-p),\ \lambda q + \mu,\ \mu).$$

である。$S = (0, s, 1)$ がこの平面上にあるためには、z 成分から $\mu = 1$、次に y 成分から $\lambda q = s - 1$、x 成分から $r + \lambda(1-p) = 0$ が必要である。最後の式に q を掛けて代入すると $rq + (s-1)(1-p) = 0$ となり、同じ条件が得られる。（ここでは P, Q, R が一直線上にない（not collinear）ことを用いている。R は上の面に、P, Q は下の面にあるので、これは正しい。）

小問 (ii)(a)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1-p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} r \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix}.$$

である。z 成分はすでに一致しているので

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \iff r = 1 - p \text{ かつ } q = 1 - s \iff p + r = 1 \text{ かつ } q + s = 1.$$

重心（centroid）は

$$\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} p+1+r \\ q+1+s \\ 2 \end{pmatrix},$$

であり、立方体の中心は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ である。第 3 成分は常に一致するので、重心が中心と一致するのは $p+1+r=2$ かつ $q+1+s=2$ のときであり、かつそのときに限る。これは同じ 2 つの条件 $p+r=1, q+s=1$ である。よって 2 つの命題は同値である。

（$r = 1-p$ かつ $s = 1-q$ のとき、同一平面上にある条件 $rq = (1-s)(1-p)$ は $(1-p)q = q(1-p)$ となり、自動的に成り立つことに注意しよう。つまり、除外される配置はない。）

小問 (ii)(b)

(a) より、$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ から $r = 1-p$ かつ $s = 1-q$ が得られる。2 つ目の条件については、$s = 1-q$ のもとで $\overrightarrow{PS} = (-p, s, 1)$ を用いて長さの 2 乗を比べる。

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{PS}|^2 &\iff (1-p)^2 + q^2 = p^2 + (1-q)^2 + 1 \\ &\iff 1 - 2p = 2 - 2q \\ &\iff q = p + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

したがって

$$q = p + \tfrac{1}{2}, \qquad r = 1 - p, \qquad s = \tfrac{1}{2} - p.$$

$q \le 1$ かつ $s \ge 0$ であるから、各点が辺上にあるのは $0 \le p \le \frac{1}{2}$ のときに限る。

考えてみよう 角 PQR を与えるのはどの 2 つのベクトルか？

Q における角は、$\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{QR}$（どちらも Q から出ていく向き）のなす角である。いま求めた値を用いると

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} p-1 \\ -p-\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} r-1 \\ 1-q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ \frac{1}{2}-p \\ 1 \end{pmatrix}.$$

すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} &= -p(p-1)-(p+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-p) = p-p^2-(\tfrac{1}{4}-p^2) = p-\tfrac{1}{4},\\ |\overrightarrow{QP}|^2 &= (1-p)^2+(p+\tfrac{1}{2})^2 = 2p^2-p+\tfrac{5}{4},\\ |\overrightarrow{QR}|^2 &= p^2+(\tfrac{1}{2}-p)^2+1 = 2p^2-p+\tfrac{5}{4}.\end{aligned}$$

ひし形であるから当然だが、2 つの長さは等しい。よって

$$\cos PQR = \frac{p-\frac{1}{4}}{2p^2-p+\frac{5}{4}} = \frac{4p-1}{5-4p+8p^2},$$

となる（分子と分母に 4 を掛けた）。これが求める結果である。

正方形。 ひし形が正方形（square）になるのは、その角が直角であるとき、すなわち $\cos PQR = 0$ のときであり、かつそのときに限る。分母 $8p^2-4p+5 = 8(p-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{2}$ は常に正なので、これが起こるのは $4p-1=0$ のときだけである。

$$p=\tfrac{1}{4}, \qquad q=\tfrac{3}{4}, \qquad r=\tfrac{3}{4}, \qquad s=\tfrac{1}{4}.$$

このとき 1 辺の長さの 2 乗は

$$2\cdot\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{4} = \tfrac{9}{8},$$

であるから、各辺の長さは $\sqrt{9/8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ である。$\frac{21}{20}$ と比べるには、これらの正の数の 2 乗を比べればよい。

$$\left(\tfrac{21}{20}\right)^2 = \tfrac{441}{400} < \tfrac{450}{400} = \tfrac{9}{8}.$$

よって正方形の 1 辺は $\frac{21}{20}$ より大きい。（実際には約 1.0607 である。）

検算

- $p=\frac{1}{4}$ のとき、4 点は $(\frac{1}{4},0,0)$, $(1,\frac{3}{4},0)$, $(\frac{3}{4},1,1)$, $(0,\frac{1}{4},1)$ であり、その平均は (a) の予想どおり $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である。また直接計算しても $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR} = \frac{3}{16}-\frac{3}{16}=0$ となる。
- $p=0$ のとき、公式は $\cos PQR = -\frac{1}{5}$ を与える。直接計算すると $\overrightarrow{QP} = (-1,-\frac{1}{2},0)$, $\overrightarrow{QR} = (0,\frac{1}{2},1)$ で、内積（dot product）は $-\frac{1}{4}$、長さの 2 乗はともに $\frac{5}{4}$ なので $\cos PQR = -\frac{1}{5}$ である。✓
- 同一平面上にある条件の恒等式、(a) の同値性、$\cos PQR$ の公式はいずれも、多数の無作為な値に対してコンピュータによる厳密な算術で確認した。

よくある間違い

- Q における角に $\overrightarrow{QP}$ と $\overrightarrow{RQ}$（一方は入ってくる向き、他方は出ていく向き）を使ってしまう。これでは余弦の符号が反転する。
- 文字の順序を取り違える。$\overrightarrow{SR}$ は $R-S$ であり、$S-R$ ではない。
- 厳密な比較をせずに、電卓の値から $\frac{3\sqrt{2}}{4} > \frac{21}{20}$ と主張してしまう。両辺とも正なので、両辺を 2 乗すれば厳密さが保たれる。

STEP のその先へ

同一平面上にあるかどうかの行列式による判定は、一般的な事実の 3 次元の場合である。すなわち、ベクトルが一次従属であるのは、それらを並べてできる行列の行列式が 0 になるときであり、かつそのときに限る。立方体の平面による切り口もまた、豊かな例の宝庫である（中心を通り、長い対角線に垂直な平面で切ると正六角形（regular hexagon）が現れる）。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、このような幾何的な観点から行列式、体積、一次従属を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。