解答例

STEP I 2019、第 4 問

純粋数学 • 四次方程式の因数分解

> **STEP I 2019、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

x^3 の項をもたない 4 次方程式（quartic）では、根の和は 0 である。したがって 4 つの根を 2 つずつの組に分けると、2 つの組の和は互いに符号が逆になる。2 つの 2 次因数の x の係数が s と $-s$ になるのは、まさにこのためである。係数を比較すると 3 つの方程式が得られ、p と q を消去すると s^2 についての 3 次方程式（cubic）が残る。小問 (i) は、最後に現れる根号（surd）の計算を助けるためにある。

解答

小問 (i)

$m+n\sqrt{2}$ を 2 乗すると $m^2+2n^2+2mn\sqrt{2}$ となるから、$m^2+2n^2=3$ かつ $mn=1$ となればよい。$m=n=1$ とするとこれを満たす：

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$$

さらに $1+\sqrt{2}>0$ であるから、これは正の平方根である。よって $m=1$、$n=1$ であり、

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

同様に $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2}$ であるから、$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ である。この両方を後で用いる。

小問 (ii)

因数分解が存在する理由。4 つの実数解を a、b、c、d とすると、$\mathrm{f}(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ である。f における x^3 の係数は $-(a+b+c+d)$ であり、これが 0 であるから $c+d = -(a+b)$ となる。根を 2 つずつ組にすると、

$$\mathrm{f}(x) = (x^2 - (a+b)x + ab)(x^2 - (c+d)x + cd) = (x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q),$$

ここで $s = -(a+b)$、$p = ab$、$q = cd$ であり、根が実数であるからこれらはすべて実数である。

3 つの方程式。展開すると、

$$(x^2 + sx + p)(x^2 - sx + q) = x^4 + (p + q - s^2)x^2 + s(q-p)x + pq.$$

$x^4 - 10x^2 + 12x - 2$ と係数を比較して（comparing coefficients）、

$$\begin{aligned} p + q - s^2 &= -10, \\ s(q-p) &= 12, \\ pq &= -2. \end{aligned}$$

s についての方程式。第 2 式から $s \neq 0$ であるから、s で割ることができ、$q - p = 12/s$ を得る。第 1 式から $p + q = s^2 - 10$ である。ここで恒等式（identity）$(p+q)^2 - (q-p)^2 = 4pq = -8$ を用いると、

$$(s^2 - 10)^2 - \frac{144}{s^2} = -8.$$

両辺に s^2（0 でない）を掛けると

$$s^2(s^2 - 10)^2 + 8s^2 - 144 = 0,$$

となり、示すべき式が得られた。

s^2 の値。$u = s^2$ とおく。展開すると、

$$u(u-10)^2 + 8u - 144 = u^3 - 20u^2 + 108u - 144.$$

144 の小さな約数を順に試すと、$u = 2$ のとき $8 - 80 + 216 - 144 = 0$ となるから、$u - 2$ は因数であり、

$$u^3 - 20u^2 + 108u - 144 = (u-2)(u^2 - 18u + 72) = (u-2)(u-6)(u-12).$$

したがって、考えられる値は $s^2 = 2$、6、12 の 3 つである。

考えてみよう 因数分解は 1 つあれば十分なのに、なぜ s^2 の値が 3 つあるのだろうか？

4 つの根を 2 つずつの組に分ける方法は 3 通りあり、それぞれの組分けが $s^2=(a+b)^2$ をもつ 2 次因数の組を 1 つずつ与える。方程式を解くにはどれを用いてもよいが、最も小さい値を選ぶと根号が最もすっきりする。

$\mathrm{f}(x)=0$ を解く。$s^2=2$、$s=\sqrt{2}$ とする（$s=-\sqrt{2}$ を選んでも 2 つの因数が入れ替わるだけである）。このとき

$$p+q=2-10=-8,\qquad q-p=\frac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2},$$

であるから、$p=-4-3\sqrt{2}$、$q=-4+3\sqrt{2}$ である（確認：$pq=16-18=-2$）。よって

$$\mathrm{f}(x)=(x^2+\sqrt{2}\,x-4-3\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2}\,x-4+3\sqrt{2}).$$

1 つ目の因数について、判別式（discriminant）は、小問 (i) を用いると

$$2+4(4+3\sqrt{2})=18+12\sqrt{2}=6(3+2\sqrt{2})=6(1+\sqrt{2})^2,$$

となるから、その平方根は $\sqrt{6}(1+\sqrt{2})=\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ である。根は

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm(\sqrt{6}+2\sqrt{3})}{2}.$$

2 つ目の因数について、判別式は

$$2-4(-4+3\sqrt{2})=18-12\sqrt{2}=6(3-2\sqrt{2})=6(\sqrt{2}-1)^2,$$

であり、その平方根は $\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$ である（$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{6}$ より正）。根は

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm(2\sqrt{3}-\sqrt{6})}{2}.$$

したがって、$\mathrm{f}(x)=0$ の 4 つの解は

$$x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}),\qquad x=\tfrac{1}{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{6}-2\sqrt{3}),$$
$$x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}),\qquad x=\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}).$$

検算

- 数値的には、根はおよそ 2.2497、−3.6639、1.2144、0.1998 である。x^3 の項がないことから要請されるとおり、これらの和は 0 であり、積はおよそ −2 で定数項に一致する。

- $x \approx 0.1998$ を代入すると、$x^4 - 10x^2 + 12x - 2 \approx 0.0016 - 0.3992 + 2.3976 - 2 \approx 0$ である。
- f の符号の変化も整合する：$f(0) = -2$、$f(1) = 1$、$f(2) = -2$、$f(3) = 25$、$f(-4) = 46$ であるから、$(-4, 0)$、$(0, 1)$、$(1, 2)$、$(2, 3)$ のそれぞれに根が 1 つずつある。

よくある間違い

- x の係数が s と $-s$ になる理由を説明しないこと。これは x^3 の係数が 0 であること、すなわち根の和が 0 であることから来る。
- s で割る前に $s \neq 0$ であることを述べ忘れること。
- 根を $\sqrt{18 \pm 12\sqrt{2}}$ のまま残すこと。問題は完全に簡単にすることを求めており、小問 (i) はそのためにある。

STEP のその先へ

これは姿を変えた 4 次方程式のフェラーリ（Ferrari）の解法である。s^2 についての 3 次方程式は 3 **次分解方程式**（resolvent cubic）であり、その 3 つの根は 4 つの根を 2 つずつ組にする 3 通りの方法に対応している。4 次方程式が 3 次方程式に帰着できるのに、一般の 5 次方程式（quintic）がそもそもべき根（radicals）では解けないのはなぜか。これを扱うのがガロア理論（Galois theory）であり、方程式の可解性を根の対称性と結びつける理論である。Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群の入門書）は、そこへ向かう大学 1 年次向けの良い道筋である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。