解答例

STEP I 2019、第 3 問

純粋数学 ・ 積分

> **STEP I 2019、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

分母と分子に $1-\sin x$ を掛けると、$1+\sin x$ は $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ に変わり、$\cos x$ の累乗を分母にもつ式はすべて標準的な部分に分解できる。すなわち $\sec^2 x$、$\sec x \tan x$、$\tan^2 x \sec^2 x$、$\sin x / \cos^4 x$ であり、いずれも見ただけで積分できる。残りの二つの積分も、姿を変えた同じ技法である。二つ目は $1+\cos x$ を含む積分になり、置換（substitution）$x = \frac{1}{2}\pi - u$ によって一つ目と同じ型に帰着する。三つ目では因子 $1-\sin x$ を 2 乗したものを掛ける。

解答

一つ目の積分

$(1+\sin x)(1-\sin x) = 1-\sin^2 x = \cos^2 x$ であるから、

$$\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \sec^2 x$ および $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x = \sec x \tan x$ であることを知っているので、

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \tan x - \sec x + C. \qquad (*)$$

$\tan \frac{1}{4}\pi = 1$、$\sec \frac{1}{4}\pi = \sqrt{2}$、$\tan 0 = 0$、$\sec 0 = 1$ を用いると、

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = (1-\sqrt{2}) - (0-1) = 2-\sqrt{2}.$$

（$1-\sin x$ を掛けてよいのは、積分区間全体で $\sin x < 1$ であり、0 を掛けることがないからである。）

二つ目の積分

分母と分子に $\cos x$（$[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 上で 0 でない）を掛けると、

$$\frac{1}{1+\sec x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} = 1 - \frac{1}{1+\cos x}. \tag{$*$}$$

考えてみよう $\dfrac{1}{1+\cos x}$ に $(*)$ を使うにはどうすればよいか。

$\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$ であるから、$u = \frac{1}{2}\pi - x$ と置換すると $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ である。$x = \frac{1}{4}\pi$ のとき $u = \frac{1}{4}\pi$、$x = \frac{1}{3}\pi$ のとき $u = \frac{1}{6}\pi$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{1+\sin u}\,\mathrm{d}u = \Big[\tan u - \sec u\Big]_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \\ &= (1-\sqrt{2}) - \Big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\Big) = 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

ここで $\tan\frac{1}{6}\pi = 1/\sqrt{3}$ と $\sec\frac{1}{6}\pi = 2/\sqrt{3}$ を用いた。区間の長さは $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi$ であるから、

$$\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{1+\sec x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{12} - \Big(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

（同様に、$\frac{1}{1+\cos x}$ に $\frac{1-\cos x}{1-\cos x}$ を掛けて $\operatorname{cosec}^2 x - \cot x \operatorname{cosec} x$ を得ることもできる。その原始関数（antiderivative）は $\operatorname{cosec} x - \cot x = \tan\frac{1}{2}x$ であり、$\tan\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2}-1$ であるから同じ答えが得られる。）

三つ目の積分

今度は分母と分子に $(1-\sin x)^2$ を掛けて、分母を $\cos^4 x$ にする。

$$\frac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1-\sin x)^2}{\cos^4 x} = \frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2\sin x}{\cos^4 x}.$$

一つ目の部分については、分子の 1 を $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ と書く。

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^4 x} = \sec^2 x + 2\tan^2 x \sec^2 x.$$

考えてみよう $\tan^2 x \sec^2 x$ と $\sin x/\cos^4 x$ を積分すると何になるか。

どちらも $f(x)^n f'(x)$ の形をしている。$f = \tan x$ とすると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^3 x = 3\tan^2 x \sec^2 x$、$f = \cos x$ とすると $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-3} = 3\sin x\,(\cos x)^{-4}$ である。したがって

$$\int \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan x + \tfrac{2}{3}\tan^3 x - \tfrac{2}{3}\sec^3 x + C.$$

$x = \frac{1}{4}\pi$ では tan = 1、$\sec^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$ であり、値は $1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$ となる。$x = 0$ では $0 + 0 - \frac{2}{3}$ である。ゆえに

$$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7-4\sqrt{2}}{3}.$$

検算

- 大きさ：$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上で一つ目の被積分関数は 1 から $2-\sqrt{2} \approx 0.59$ まで減少するので、積分の値は 0.46 と 0.79 の間にある。$2-\sqrt{2} \approx 0.586$ はこれに合っている。同様に、三つ目の被積分関数は一つ目の 2 乗であるから、その積分はより小さいはずである。実際 $(7-4\sqrt{2})/3 \approx 0.448$ である。
- 求めた原始関数を微分してみる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x - \sec x) = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1+\sin x}$。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）によると、三つの積分の値は 0.585786、0.098663、0.447715 となり、$2-\sqrt{2}$、$\frac{\pi}{12} + \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$、$\frac{1}{3}(7-4\sqrt{2})$ と小数第 10 位まで一致する。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x$ や $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^3 x$ の符号の誤り：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-n} = n\sin x(\cos x)^{-n-1}$ であるから、どちらも符号はプラスである。
- 一つ目と三つ目の積分で下端を忘れること：$\sec 0 = 1$ であり、0 ではない。
- $u = \frac{1}{2}\pi - x$ の置換の後で積分の上端と下端を誤って入れ替えること：$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ から生じるマイナス符号は、端点を小さい順に並べ直すために使われる。

STEP のその先へ

「共役」（conjugate）を掛けるという技法は、ある体系的な方法の特別な場合である。置換 $t = \tan\frac{1}{2}x$ によって、$\sin x$ と $\cos x$ の任意の有理関数（rational function）は t の有理関数に変わり、それは部分分数分解（partial fractions）によって積分できる。（$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ に対する答え $\tan\frac{1}{2}x$ はその手がかりである。）大学 1 年の解析学では、このような積分がそもそも存在するのはいつか、ということも問題になる。たとえば $1 + \sin x$ が 0 になる $x = -\frac{1}{2}\pi$ の近くなどである。これら二つの考え方については Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を、この種の積分をさらに多く扱ったものとしては Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。