解答例

STEP I 2019、第 2 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線の接線

STEP I 2019、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2019 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP I の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

鍵となる考え方

この媒介変数表示（parametrisation）は、媒介変数 t における傾き（gradient）がちょうど t になるように選ばれており、そのおかげでどの接線（tangent）の式も非常にすっきりした形になる。2 本の接線の交点を求める問題は、3 乗の差の因数分解に帰着する。さらに、垂直（perpendicular）条件 $pq = -1$ を使えば、すべてを和 $p + q$ で書き直すことができる。共有点については、一方の媒介変数表示を他方に代入すると重解（repeated root）をもつ多項式が得られ、その重解が図形について何かを語っているのである。

解答

接線

$x = 3t^2$、$y = 2t^3$ のとき、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{6t^2}{6t} = t \qquad (t \neq 0).$$

よって、点 $(3p^2, 2p^3)$ における接線の傾きは p であり、その方程式は

$$y - 2p^3 = p\,(x - 3p^2) \quad \Longrightarrow \quad y = px - 3p^3 + 2p^3 = px - p^3,$$

となり、示すべき式が得られた。（$p = 0$ のとき点は原点であり、尖点（cusp）である。そこでは曲線は $y = \pm 2(x/3)^{3/2}$ であり、x 軸 $y = 0$ に接するので、この式はやはり成り立つ。）

2本の接線の交点

$p \neq q$ のとき、接線 $y = px - p^3$ と $y = qx - q^3$ は

$$(p-q)\,x = p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2).$$

を満たす点で交わる。$p \neq q$ より両辺を $p-q$ で割ることができ、$x = p^2+pq+q^2$ となる。すると

$$y = px - p^3 = p^3 + p^2q + pq^2 - p^3 = pq(p+q).$$

したがって、2本の接線は

$$(p^2+pq+q^2,\ pq(p+q)).$$

で交わる。

接線の傾きは p と q であるから、2本が垂直になるのはちょうど $pq = -1$ のときである。$u = p+q$ とおくと、$p^2+pq+q^2 = (p+q)^2 - pq = u^2+1$ かつ $pq(p+q) = -u$ である。よって、垂直な2本の接線は $(u^2+1,\ -u)$ で交わり、示すべきことが得られた。

考えてみよう $\widetilde{C}$ 上のすべての点は、実際に垂直な2本の接線の組から得られるだろうか？

得られる。任意の実数 u に対し、$p+q = u$ かつ $pq = -1$ であればよいので、p と q は $z^2 - uz - 1 = 0$ の解である。その判別式（discriminant）u^2+4 は正であるから、異なる2つの実数解がつねに存在する。したがって、$\widetilde{C}$ はちょうど、C に垂直な2本の接線を引くことのできる点全体の集合である。

両方の曲線上にある点

媒介変数を消去すると、$\widetilde{C}$ は放物線（parabola）$x = y^2+1$ である。C 上の点 $(3t^2, 2t^3)$ がこの上にあるのは、ちょうど

$$3t^2 = 4t^6 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4s^3 - 3s + 1 = 0, \quad \text{ただし} s = t^2.$$

のときである。$s = -1$ が解であるから、因数分解できる：

$$4s^3 - 3s + 1 = (s+1)(4s^2 - 4s + 1) = (s+1)(2s-1)^2.$$

$s = t^2 \geq 0$ であるから、可能なのは $s = \frac{1}{2}$ のみであり、$t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。このとき $x = 3t^2 = \frac{3}{2}$、$y = 2t^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。共有点は

$$\left(\tfrac{3}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{と} \quad \left(\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

である。

考えてみよう 重複因数 $(2s-1)^2$ は何を教えてくれるのだろうか？

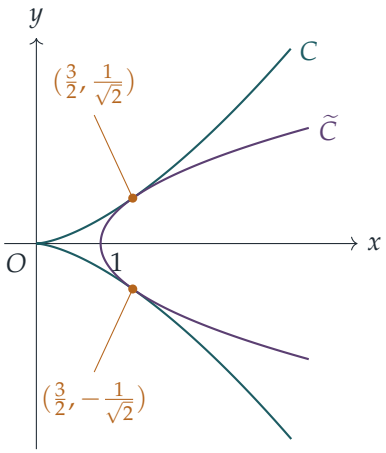
重解はふつう接することを示しており、ここでもまさにそうなっている。$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ において C の傾きは $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。$\widetilde{C}$ 上では、$x=y^2+1$ から $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2/\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり、同じ値である。対称性から、下側の点でも同じことが成り立つ。よって、2 つの曲線は両方の点で接しており、交差はしない。

概形

C から t を消去すると $y^2=\frac{4}{27}x^3$（ただし $x\geq 0$）が得られる。これは半 3 次放物線（semicubical parabola）であり、x 軸に関して対称で、原点に左向きの尖点をもつ。$\widetilde{C}$ は頂点 $(1,0)$ をもち右に開いた放物線 $y^2=x-1$ である。どちらの曲線が外側にあるかを調べるため、$x\geq 1$ における 2 つの y^2 の値を比べる：

$$f(x)=\tfrac{4}{27}x^3-(x-1),\qquad f'(x)=\tfrac{4}{9}x^2-1,$$

よって、$x\geq 1$ において f は $x=\frac{3}{2}$ で最小となり、$f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ である。ゆえに $f(x)\geq 0$ であり、等号が成り立つのは $x=\frac{3}{2}$ のときに限る。したがって、$\widetilde{C}$ は C の内側（x 軸に近い側）にあり、2 つの共有点で C に接する。



検算

- $p=1$、$q=-1$ とする（このとき $pq=-1$、$u=0$）。接線は $y=x-1$ と $y=-x+1$ であり、これらは垂直で、$(u^2+1,-u)$ が予測するとおり $\widetilde{C}$ の頂点 $(1,0)$ で交わる。
- $p=2$、$q=-\frac{1}{2}$ とすると $u=\frac{3}{2}$ である。接線 $y=2x-8$ と $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$ は $\frac{5}{2}x=\frac{65}{8}$ となる点で交わるので、$x=\frac{13}{4}=u^2+1$、$y=-\frac{3}{2}=-u$ である。

- 点 $(1.5, 0.7071)$ は $y^2 = \frac{4}{27}x^3$（$\frac{4}{27} \cdot \frac{27}{8} = \frac{1}{2}$ より）と $y^2 = x - 1$ の両方を満たす。また、コンピュータによる確認でも $3t^2 - 4t^6 - 1$ が決して正にならないことが確かめられたので、ほかに共有点はない。

よくある間違い

- $s = t^2$ が負になりえないことを忘れ、解 $s = -1$ を使おうとしてしまう。
- 共有点で放物線が C に接するのではなく、C と交差するように描いてしまう。

STEP のその先へ

曲線 $\widetilde{C}$ は C のオルトプティック（orthoptic）、すなわち C に垂直な 2 本の接線を引くことのできる点の軌跡（locus）である。放物線の場合、それは準線（directrix）になる。曲線をその接線族によって記述する考え方は、包絡線（envelope）や射影幾何学（projective geometry）における双対性（duality）へとつながっていく。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には、この種の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。